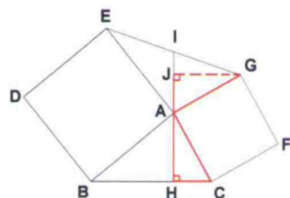
本书将基本图形分析法融入课堂教学，剖析每一条辅助线添加的规律性，随附的《几何王》智慧教育软件集合平面几何的典型习题，将如何运用基本图形分析法添加辅助线的过程，用信息技术形象、动态地展示出来，被称为“思维过程的脑CT”。

# 透明的几何

## ——互联网+平面几何的新实践




徐方瞿 徐雯 编著



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

运用《几何王》和《思维王》软件，帮助师生突破教与学的难点，让学习过程更清晰、有趣。

——教育部中央电教馆馆长　王珠珠

基于几何教学训练思维的软件《几何王》和基于大数据的评价软件《思维王》，将教师一般的教学思路，从单纯记忆与题海战术发展到具有科学性的思维过程训练，为各种水平的学生学习几何提供了很好的环境与平台，也是一个较为全面的教与学的实验平台。

——北京大学教授　林建祥

应用信息技术使学生几何证明的思维可视化，引导学生在证明题目的过程中形成正确的数学思维方式。

——华东师范大学教授　王吉庆

乔布斯问："为什么计算机改变了几乎所有领域，却唯独对学校教育的影响小得令人吃惊？"本书应用互联网技术实现学生数学思维过程的可视化与精准测评，对此作出令人惊喜的回答。

——华东师范大学教授　祝智庭

传统的平面几何教学和互联网技术的交互融合，学生在电脑上能够形象地看到思维的过程，有益于启迪思维，提升思维品质。

——上海师范大学教授　黄刚

以思维过程的可视化、可测评化为核心技术的智慧教育软件的成功研制，是思维科学和大成智慧研究的基础性工程之一，也是人工智能研究的基础性工程之一。

——上海思维科学研究会会长、上海海事大学教授　冯嘉礼

几何证明思路复杂，要揭示学生的思维路线图，是个世界性难题，看到《几何王》和《思维王》软件，我惊喜地感到走出了可喜的一步。

——上海市徐汇区教育学院教授　陈永明




上海教育出版社
官方微信平台



官方网站：
www.seph.com.cn

ISBN 978-7-5444-7429-0




易文网：www.ewen.co
定　价：　58.00元

# 透明的几何

## ——互联网+平面几何的新实践

徐方瞿　徐雯　编著



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据
透明的几何:互联网+平面几何的新实践 / 徐方瞿,徐雯编著. —上海:上海教育出版社,2017.2
ISBN 978-7-5444-7429-0

Ⅰ. ①透… Ⅱ. ①徐… ②徐… Ⅲ. ①平面几何—教学法
Ⅳ. ①O123.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第036332号

责任编辑 宁彦锋 汪海清
封面设计 周 亚

**透明的几何**
——互联网+平面几何的新实践
Touming de Jihe
**徐方瞿 徐 雯 编著**

---

出 版 上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社
官 网 www.seph.com.cn
易文网 www.ewen.co
地 址 上海市永福路 123 号
邮 编 200031
发 行 上海世纪出版股份有限公司发行中心
印 刷 昆山市亭林印刷有限责任公司
开 本 700×1000 1/16 印张 20.25 插页 2
版 次 2017 年 3 月第 1 版
印 次 2017 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5444-7429-0/G·6118
定 价 58.00 元

---

(如发现质量问题,读者可向工厂调换)

上海市第十届政协副主席、上海科技成果转化促进会会长、上海市教育发展基金会理事长王荣华同志为本书题词：

這是一本让所有数学老师能够教好平面几何的书、也是實現提高孩子学习数学兴趣、共享优质几何教学、迈向成功的钥匙。

王荣华

二〇一七年元旦

# 前　言

平面几何，是初中教育阶段培养学生思维能力(包括直觉思维、逻辑思维和创新思维)最基础、最重要的学科之一，在学生成长的这一特定年龄段，至今国内外都无法用另一门学科来取代它.然而，平面几何恰恰又是长期以来老师难教、学生难学的一门学科，多少没有输在起跑线上的孩子，却绊倒在了几何线上.究其原因，就是传统的几何教学无法揭示和讲清楚几何问题分析方法的规律性，老师无法正面、直接、准确、清晰地回答学生的问题——"老师，这个问题的证明方法，你是怎么想出来的?"

为了探索几何问题分析方法的规律性，从根本上解决几何教学的难题，笔者在近20年研究的基础上，于20世纪70年代末，首创并提出了一种新的分析方法——基本图形分析法.由于基本图形分析法能揭示几何问题分析方法的规律性，能讲清楚对一个几何问题怎样一步一步想出来的思维过程，尤其是可以讲清楚一条一条辅助线是怎样想出来的道理，老师讲得清楚明白，学生能够学会掌握，所以这种方法一经问世，就引起数学教育界的高度关注和重视，并在许多学校迅速地得到推广应用，取得了很好的效果，产生了良好的社会影响.

基本图形分析法提出以后，经过了近40年的发展，在逐步形成完整系统的基础上，也展现了两个方面的特点：一是对每一个基本图形，都清楚地论述了它的应用条件和应用方法(包含了添加辅助线的方法)；二是对每一个基本图形的应用条件和应用方法都能用规范化的语言来准确地阐述.也就是说，在这样的基础上，学习者对拿到一个几何问题后是怎样想的，是怎样一步一步想出来的，就可以做出清楚、准确的回答.这就是几何问题的分析、思维过程的展示，几何教学真正实现了从追求前人思维成果的获取、记忆到追求思维过程的培养、训练和形成这一飞跃.

以电脑、互联网为核心技术的信息时代的来临，对平面几何这一学科教育的发展来说，无疑带来了机遇和挑战.然而，融合点、切入点在哪儿呢？在平面几何教学中，怎样才能充分地，甚至是淋漓尽致地发挥信息技术的优势呢？根据多年来的研究，我们认为将以基本图形分析法为基础理论的几何问题的分析、思维过程，用信息技术在电脑等移动终端上形象地、一步一步地展示出来，应该是一项极具挑战性，但又是值得我们为之而奋斗的事业.经过多年的努力，我们研制成功了以思维过程的可视化为核心技术的智慧教育软件——《几何王》初中平面几何学习软件.2015 年 1 月，《几何王》软件已成功接入“国家教育资源公共服务平台(n.eduyun.cn)”.日前，我们又研制成功并正式上线运行一款新颖的智慧教育软件——《学生思维过程的显示和评价系统——〈思维王〉(初中数学)》.

近几年来，为了提高初中数学教师在课堂教学中常态化应用《几何王》软件的能力，在上海市教委和上海市杨浦区教育局的领导、关心和支持下，我们在上海市初中数学教师职务培训工作中，开办了十多期“现代教育信息技术和平面几何教学研究”专题培训班，取得了显著的成效，受到了参加学习的老师们的欢迎和好评.同时，许多老师也期望培训的内容能尽早成书，以方便他们在日常教学中参考使用.

为此，我们在原有的教学内容的基础上，根据老师们的要求，充实内容编撰成书.本书的编写有以下几方面的特点：

第一，基本图形分析法的论述和智慧教育软件的研制，都必须建立在科学性的基础上，才有可能取得成功，而我们以往的几何教学在很多方面却还处于经验教学的层面.所以，首先需要论述的就是怎样从经验教学发展、升华到科学教学的层面，而基本图形分析法和智慧教育软件的相继问世，就是这种发展、升华的结果.

第二，我们的智慧教育软件是以基本图形分析法为基础理论的.关于基本图形分析法的论述是本书的基本的、主要的内容.但本书并不是论述基本图形分析法的专著，不可能对这种分析方法作完整的、详尽的介绍，所以我们只选用了在几何教学中最重要的，也是老师、学生最需要的三部分内容，即等腰三角形、全

等三角形、相似三角形进行介绍和论述.即使是这样,对每一个基本图形的应用也只能选讲一两个,最多也就是几个例题,可能会给读者带来一种意犹未尽的感觉.当读者需要获得更多的信息、阅读更多的内容时,都可根据本书提供的账号,直接登陆网站后,打开软件进行浏览,这也就成为本书适应“互联网+”的形势发展要求的一个特色.

第三,基本图形分析法是以展示思维过程为特点的,是这种方法最显著的优势.所以,本书撰写的方法就必须满足展示思维过程的要求,也就是每一道例题的图形是要随着分析过程的进行而不断发展、不断变化的.每推进一段分析,尤其是每添加一条辅助线,都必须要用新的图形来展示.每一道例题都会有若干个、甚至很多个图形,读者可以将每一个图都和相应的分析语言配合起来阅读,易于较快地领悟其中的道理.

第四,本书是以介绍、论述思维过程为特点的,对每一个例题的介绍都只撰写分析过程,而略去了证明过程.作为成功的几何教学来说,学生掌握分析过程的意义、价值和重要性要远远超过证明过程.没有正确的分析过程,正确的证明过程不会从天上掉下来,而有了正确的分析过程,再加上规范化的表达训练,正确的证明过程就是必然的归宿.

第五,以在电脑上形象地、一步一步地展示几何问题的思维过程为特点,以思维过程的可视化技术为核心技术的《几何王》软件,是一项将信息技术和平面几何教学实现深度融合的创新成果,现在已被许多老师称为是思维过程的“脑CT”.软件的应用,将有力地推进我国信息技术在学科教学、课堂教学中常态化应用的进程,提高常态化应用的水平.为此,本书在介绍《几何王》软件的操作应用方法的同时,还论述了关于在课堂教学中常态化使用软件的要求和方法,并介绍了相关的应用实例.

第六,学生思维过程的显示和评价系统——《思维王》软件(初中数学),是我们最新的、具有独创性的研究成果.这一软件系统要实现的目标是对学生的思维能力、思维水平、思维品质进行评价.这是一项更具挑战性的工作.由于本书是对这一研究成果的最新、最快的介绍,所以只能是作概要性的论述.

本书是一本论述平面几何教学(尤其是基本图形分析法)和信息技术进行

深度融合的专著，目的是将平面几何问题的思维过程进行剖析、展示，奉献给广大读者，因此定名为《透明的几何》.它可以作为初中数学教师的平面几何教学参考书，也可以作为学生学习、学好平面几何的学习指导或自学用书，还可以用作初中数学教师职务进修的教材.

本书的撰写、出版，得到了上海市教委、上海科技成果转化促进会、杨浦区教育局、杨浦区教师进修学院、上海教育出版社的关心、支持和帮助，华东师范大学王吉庆教授也给予了专业的指导和帮助，在此致以诚挚的谢意！

由于笔者水平所限，对于本书的不当之处，望广大读者给予批评指正.

编　者

2016 年 9 月于上海杨浦区教师进修学院

# 目 录 Content

# 第一章　透明的思维

## 第一节　思维过程教学的重要性

“老师,你拿到这个问题的时候是怎么想的?为什么你想得出来,我想不出来?”

这是一个充满着求知欲的问题,是学生心中最疑惑的问题,也是每一位老师在教学过程中遇到的频率相当高的问题.

从教育所追求的崇高目标来看,面对这样一个问题,老师理应回答,拿到这个问题的时候,自己是怎样想的,是从哪个条件、性质开始思考的,是怎样一步一步想出来的.然而,深入地看一看我们教学中的实际情况,就可以发现事实并非如此,这样一个看似很简单的问题,却常常可以难倒许多老师,甚至不少优秀的资深教师.

这是什么道理呢?

多少年来,我们的教育普遍重视的是知识的传授和技能的训练,而弱化了思维能力的培养.尽管不少教育界的有识之士也明白培养能力,尤其是思维能力的重要性,但由于人们对能力发展规律性的认识局限、缺少科学方法的指导以及其他种种原因,因此思维能力的培养和发展一直处于一种被弱化、被抑制的状态.

“师者,所以传道受业解惑也”作为一种教育思想、教育观念甚至教育理念,深深地影响着我们一代又一代的老师,直到今天,许多老师也还是仅仅将传授知识看作自己的天职.其实,在我们的传统教育理念中,也不乏强调思维能力培养的警句格言,如“学而不思则罔,思而不学则殆”“授人以鱼,不如授人以渔”“事要知其所以然”“读书之法,在循序而渐进,熟读而精思”,等等.然而,这些重要的道理对当今教育所产生的影响是十分有限的.

翻开我们的教材和各种各样的教学参考资料,几乎所有的内容都定位在

“这样做”“做给你看”“这样做了就会得到什么”“示范解题过程和结果”的层面上，没有针对思维过程的阐述和介绍.许多教案甚至被评为优秀的教案，其最重要的内容也常常是从教学参考书上大段大段摘抄过来的解题结果.在课堂教学中，许多老师几乎从来没有给学生提出过这样的问题:“你是从哪里开始思考的？为什么你会这样想?”当然，也有不少老师，由于体会到培养学生思维能力在教学中的重要性，因此尽力在教学中给学生进行分析，讲述思维过程，但因为大多是在自己积累的经验基础上进行讲述，所以常有不少关键的思维节点讲述不清，这就难免出现老师认为已讲了，学生却依然一头雾水的情况.如在几何教学中，有的老师会介绍一种分析方法叫“两头凑”，就是从条件开始推理思考，若几步下来无法解决，再从结论开始逆向思考，然后将两边建立联系，完成分析解答.实际上，分析的几个步骤不是关键，关键的恰恰是“两头凑”到某一步的时候，这座架起来的“桥”是怎么想到的.这个关键问题不解决，实质上依旧没有打通对问题的分析思路.由此可见，教育发展所要解决的一个根本问题，就是要从重视“怎么做”到重视并落实“怎么想”.杰出的科学家爱因斯坦也指出:“学习知识要善于思考，思考，再思考.”讲的也就是这个道理.

“怎么想”的问题，本质上就是一个思维的问题，或者说也就是一个思维能力培养的问题.种种教育现象足以说明，落实思维能力的培养对我们教育的发展来讲，是必须面对的严峻挑战.

思维过程的教学之所以重要，是因为人的一切解决实际问题的方法都是想出来的，人的一切创新创造成果也都是想出来的，不是背书背出来的，是思维的结果，是展现思维能力的结果.从根本上讲，科学的发展，社会的进步，哪一项成果不是人们想出来的！那么，思维和思维能力是通过什么来展现的呢？这就是思维的过程.

教育的启蒙阶段、起始阶段，或者讲第一个阶段是什么？实际上就是通过模仿进行学习的阶段，教师通过示范、手把手教，学生主要通过模仿来进行学习，并取得学会的结果.学习思维、培养思维能力的开始，显然也应该是模仿.那么，模仿什么，怎么模仿，就是两个不可回避的问题.在实际教学中，教师不能光讲有关思维和思维能力的知识，因为这些知识对许多学生来说，即使都掌握了，

甚至都记住背下来了,恐怕也还是不知道怎样去具体地思维.这时老师就必须要讲拿到这个问题是怎样开始进行思维的,而只要老师一开口,就马上会发现是在讲思维过程,这时学生能够模仿的就是老师思维的过程.

当然,有的老师,特别是已经有相当教龄的惯用传统方法进行教学的老师,会提出一个问题:我们过去并没有重视思维过程的教学,不照样能培养出一批优秀的、思维能力很强的学生吗?其实,从教育所承担的社会功能来讲,当然是要提高受教育者的素质层次,培养人才,而任何一种形式的教育都能或多或少培养出一批思维能力强的优秀学生、优秀人才,但采用不同的教育形式、教育方法和教育手段,所培养出来的优秀学生、优秀人才的比例是不一样的,教育的效率也是不一样的,甚至可能有很大的差异.重视思维过程的教学和不重视思维过程的教学,在教学的效果和效率方面,用不了多长时间,就会展现出差异来,这已经被大量的实验学校的教学实践所证实.

对学生思维能力的培养,实际上是从对老师的思维活动的模仿开始的,所以老师必须要讲清楚自己解决每一个问题的思维过程,从重在讲"怎么做"到重在讲"怎么想",这样学生就可以从模仿开始,一步一步地学会自己去进行思考.

## 第二节　思维过程的内涵

从根本上讲，思维过程的内涵包含着以下四个部分的内容.

第一，拿到一个问题以后是怎样想的？这个问题是思维过程的起始点，是源头，实际上问题常常就决定了思考一个问题的思维轨迹.

每个人在拿到一个需要解决的问题时，都会先考虑从什么地方下手，从什么性质开始思考.选择从A性质开始思考，思维过程可能很顺畅，问题也很快得到解决；而选择从B性质开始思考，思维过程很可能就会遇到困难甚至走向歧路.那么，为什么有的人能够顺利地想到正确的解法呢？

当一个人开始思考一个问题时，由于解决问题的正确思路并不清楚，因此通常都会先思考解决问题的思路有哪些可能性或者解决问题的大致方向，这时常常就表述为“拿到这个问题时，我首先想到了哪几种可能性”或者“我是从这个方向(这个角度)开始思考的”.有的问题是从观察开始的，这时常常就表述为“拿到这个问题后，首先进行观察，通过观察发现它具有怎样的特征，于是我想到要用怎样的方法去解决问题”.还有的问题的思考是从进一步准确理解问题的意义，从而抓住问题的关键开始的，等等.

对于拿到一个问题以后如何思考这样一个思维起始源的问题，在具体展示时，还会出现两种情况：一种就是思维的起始源完全建立在逻辑关系的基础上，这时就可以直接应用逻辑推理方法来进行表述；另一种就是思维的起始源是建立在非逻辑关系的基础上，看上去常常没有明确的因果联系，要表述思维很不容易，需要下一定的功夫来实现.

由于教师在教学中或考试中给出的问题，常常会包含着多个表述为条件和结论的性质，所以从不同的性质开始思考，就会指向多种可能性.对这多种可能性的思考，就是一次扩散思维的过程.而在这多种可能性中，确定从哪一种可能

性开始着手，就是一次集中思维的过程.如此进行一次完整的创新思维过程，也就是思维过程的第一个环节.由此可见，思维过程的展示，首先要做的就是对这一个环节中遇到的这两个方面的问题作出科学性而非经验性的、碰运气的回答.

在我们目前的教学活动中，"拿到一个问题后是怎样想的"还是一个使用频率并不很高的问题，对不少教师来说，有时甚至是一个刻意回避的问题，也就不易取得理想的教学效果.

有一次，我在听完一节公开课以后，找了三个学生，以下就是我们之间的一段对话.

我："今天上课的第二个例题你们懂了吗？"

生(不假思索)："懂了."

我："那么，是老师讲了以后才懂的，还是你们自己想出来的？"

他们想了一想以后又回答："是自己想出来的."

我："很好，那你们就说一说，你们当时是怎样想出来的？"

结果，三个学生给出了三个不同的回答："老师，我想也已经想出来了，你何必还要问这个问题？""你这个老师很怪的，我们老师从来不问我们这种问题.""老师，我就是东想想，西想想，嗨！给我想出来了."

这就是一次课堂教学效果的直接展现，可见思维过程教学现状之严峻.在这里也可以实事求是地看到，第三位学生给出的回答说明了他真的是自己想出来的，然而也正是碰上了运气，如果在某次考试时没有这样的运气呢？显然，对于"拿到一个问题后是怎样想的"，不仅对学生，甚至对不少教师来说，都还是一个相当困惑的问题.

根据我们对实际教学状态的调查，目前有不少学生拿到一个问题后，首先想的是：这个问题看到过没有？这道题目老师讲过没有？这道题目自己做过没有？如果这道题目是老师讲过的，自己做过的，就会马上回忆当时老师是怎么讲的，自己是怎么做的.如果这道题目是老师没有讲过的，自己没有做过的，这些学生常常无所适从，连仔细思考一下的勇气也没有，失去了解题的方向和走向成功的信心，这样的学生为数不少.当然，也有的学生拿到一个问题后，就是漫无目的地东想西想，完全想靠碰运气来解决问题；还有的学生拿到问题后，就是先

用一种方法试试看，不行再换另一种方法，希望多试几次以后，就能走向成功.种种现象表明，许多学生表现出来的状态就是不会思考，不知道应怎样着手进行正确的思考.

对教师来说，讲清楚“拿到一个问题后是怎样想的”应该是教学的基本功.然而，实际备课时，许多教师都是直接从教学参考资料上找题目，直接引用答案.在这个过程中，有相当一部分教师并没有真正思考过“拿到一个问题后是怎样想的”，也缺少对这样一个重要问题的切身体会.当然，也可能有一些教师尝试思考过，但要真正想通每一个问题要耗费不少时间，在日常的教学备课过程中常常不允许他们去花费这样的时间和精力.即使有为数不多的教师也确实讲了“拿到这个问题后是怎样想的”，也都是在知道了解题的结果以后，采用一种客观的表述给出一种解释性的、希望能“自圆其说”的说法，并不是对上述问题的真实回答.

重视思维过程的教学，每一位教师都应该首先花大力气，下苦功夫，思考、研究、记录、表述自己拿到这个问题后是怎样想的，将这个过程记录下来，表达出来.我们相信，教师们的教育水平、教学能力都会在这个过程中得到显著的提高.

第二，问题的解决办法是怎样一步一步想出来的？这是思维过程的核心内容，这里最重要的内容就是“一步一步”地具体展示思维活动的全过程.

人思考一个问题的思维过程，总是一步一步向前发展、推进并最终完成的.所以，将思维结果整体地介绍，许多学生难免会不理解这个结果是怎样想出来的.

例如，目前我们所使用的几何教材、参考书、习题册甚至解题辞典，几乎所有问题都只有一个已经完成解题的、所有辅助线都已经添加完成的图，显然在这样的图中，思维过程已经被简略或隐掉了，学生当然就很难体会到思维的过程和思维过程对于几何学习的重要性.

人的思维活动是具有纵向计时性的，无论是以分、秒为计时单位，还是以小时、日为计时单位，思维活动总是伴随着这一个一个前后衔接的时间单位，一步一步、一个环节一个环节地推进、发展和演变，最终构成整个思维活动的全过程.

思维过程是一步一步来展示的,存在从上一步想到下一步的衔接问题.从思维本身来分析,就是一个怎样想下去、由这一步或这一个性质可以想到什么的问题.由于这里出现的是一种因果关系,人们首先想到的就是逻辑推理.也就是说,一个人所进行的思维活动如果仅仅是逻辑思维,那么就一定可以通过不断地采用逻辑推理方法一步一步地展示出来.然而,人们所进行的思维活动并不仅限于逻辑思维,还包括直觉思维、辩证思维、创新思维等其他思维形式,对于这些思维活动,同样有一个一步一步想出来的过程问题.

即使是那些没有明确逻辑推理关系或者是跳跃式的思维活动,甚至是可以在一瞬间完成的思维活动,如联想、灵感或扩散思维等,如果我们把整个思维活动实录下来进行研究的话,就会发现同样是有一步一步的思维过程的.

思维过程是一步一步想出来的,但翻开任何一本用文字(包括符号、图形)撰写的著作,不管是科学技术论著还是文化艺术作品,却很少发现有详细记述或展示思维过程的专著,显然,这是一个值得重视和研究的现象.

实际上,要将一个人、哪怕是一位著名人士的思维过程展示在一本书中,是很困难的,而造成这种结果有着多方面的原因.

首先,人的思维过程在每一个思维节点上展开时,经常表现为一种扩散思维,这种扩散思维显然不是一维的、线性的,而是多维的、平面的、立体的,要将这种多维的思维活动过程在纸质的书本上表达出来,其难度是可想而知的,这也就是为什么思维过程的展示总是和信息技术结合起来的道理.

其次,人的思维过程实际上都是"写在草稿纸上"的,可以完全不受任何制约、没有任何束缚地展开,思维作任何尝试,甚至出现一次一次的错误、失败都无妨,但在一本正式出版的专著中,人们就不可能这样来展示和叙述.

再次,人在探索一个新的问题的解决方法和途径时,思维是可能走到歧路上去的.当人们没有意识到自己的思维活动出了问题的时候,就会沿着这一条思路继续想下去.但对一位最终获得成功的人士来说,他总会在思考到一定时间后,产生发现自己的思维活动出现问题的意识,然后就思考进一步解决问题的正确方向,这种"尝试—意识到问题—调整新的思维方向"的思维模式,在解决问题的思维过程中会不断出现,而要将这样的过程完整地表述出来,显然也不

是一件容易的事情.

思维过程的展示对思维能力的培养具有十分重要的意义,思维过程的教学对提高课堂教学质量,乃至整体上提高教育质量也具有十分重要的意义,但我们能够参阅和借鉴的科学界、教育界关于展示思维过程的资料又如此稀少,这就需要我们今天的教师花大力气、下苦功夫,将每一个问题中一步一步的思维过程总结出来,展示出来,努力成就这一项有重要意义的工作.

第三,为什么会这样想? 这是确保思维过程的合理性、正确性的要求,是检验学生是否真正掌握了思维过程的试金石,也是促使学生的思维活动向更高层次发展的助推器.

对一个问题的思维过程进行剖析和讲授时,必然会遇到一个问题,就是"为什么会这样想",这也是许多学生充满疑惑而又迫切希望明白的问题.

许多老师在教学中都会有这样的体会,在讲了一道题目的解题方法和解题结果以后,学生常常会问:"老师,你为什么是这样想的呢?"学生疑惑的实际上就是你为什么是这样想而不是那样想,其中有怎样的道理.

教师要真正做到"授人以渔",最根本的问题就是回答清楚为什么会这样想.教师所讲的每一句话,都必须经受得起学生对思维过程提出疑问的考验.同时,教师在教学中要不断地要求、引导学生弄清楚为什么会这样想.

对一个问题思考的每一步,都能回答为什么会这样想,这对老师的教学能力来说是相当高的要求,需要在教学实践过程中不断地完善、提高,期待老师们都能为实现这一目标而刻苦钻研、努力奋斗!

当然,就课堂教学而言,我们不可能要求教师对思维的每一步都进行回答,但对问题中影响学生真正理解的最关键的步骤,教师必须讲清楚.

就思维过程本身而言,到"一步一步"完成,实际上也就已经完成了思维的过程.所以,为什么会这样想是一个更高层次的要求.在教学中,我们可以给学生一定的引导和启迪,并不一定要对学生提出这方面的要求.然而对教师来说,提出这一要求是完全必要的.

第四,当你的思维活动或者思维过程走上歧路时,你怎么意识到自己的思维出了问题,并进一步怎样将自己的思维活动或思维过程重新纳入正确的轨道

上，也就是问这个意识是怎样产生的？

人在思考一个问题的过程中，尤其是在探索性地思考一个问题的过程中，思维活动走上歧路是一种正常的思维现象.问题不在于人的思路是否走上歧路，而在于走上歧路的时候，怎么意识到自己的思维出了问题.也只有在意识到这一点时，人们才有可能将自己的思维活动或思维过程重新纳入正确的轨道.

思维走上歧路是人的思维过程中不可缺少的重要组成部分，离开了思维走上歧路这样一种思维现象，要正确地认识思维过程，正确地展示思维过程，显然是很困难的.

在日常教学中，当学生在做课堂练习题的时候，教师一般都在教室里巡视.当看到某一位学生发生错误时，有的教师会用手在这位学生的课桌上轻轻地敲几下，实际上就是在提醒学生："错啦！"然而在测验、考试时，在需要他们独立地进行思考的时候，没有教师提醒怎么办？这时需要的就是一种意识.我们经常可以看到许多学生在思考一个问题的时候，明明已经出了问题，思维活动已经走上了歧路，但他们并没有这种意识，还是在绞尽脑汁地想，结果多少时间用上去也解决不了问题.我们也会看到有的学生拿到一个问题，顺着一个方向思考没有多久，就发现不对了，继而迅速改变思考的方向和思路，显然他们就是具备了这种意识.

当然，要意识到自己的思维出了问题，要产生这种意识，在思维过程中是需要有某种"信号"的.例如，在思考一个问题的过程中，如果感觉到思路在很顺利地发展，没有感到什么思维上的障碍，应该说思维过程就是正确的；反过来，如果感觉到的是思路不顺，思维过程很别扭，似乎不断地遇到自己无法逾越的障碍，就是一种"信号"，就要停下来思考思维是否走上了歧路.如果在思考过程中，自己需要得到的某种具有重要价值的思维成果，就像是在迎候着你的到来一样，适时地展现在你的面前时，你可以很自信地断定自己的思维过程是正确的；反过来，如果在思考过程中，自己需要得到的某种具有重要价值的思维成果迟迟不出现，很长时间里都是一种可望而不可及的状态，就是一种"信号"，就要停下来思考思维是否走上了歧路.如果在思维过程中，即使思维的容量越来越大，但思路却越来越清晰，获得思维成果的把握越来越大，你可以很自信地断定自

己的思维过程是正确的；反过来，如果在思考过程中，思维的容量越来越大，但思路却越来越乱，理不出正确的头绪和脉络，看不出思维发展的明确方向，就是一种“信号”，就要停下来思考思维是否走上了歧路.如果在教学中，对一个问题的思考、推演，出现的结果越来越简化，并很快聚焦于规范，就可以确信自己的思维没有问题；反过来，如果思考、推演中出现的结果越来越繁复，不能聚焦于规范，就是一种“信号”，就要停下来思考思路是否走上了歧路.

在教学过程中，教师能指导学生产生并具有这样一种意识，对于提高学生的思维能力来说，是十分重要、十分必要的.

## 第三节　思维过程教学的智能基础

重视思维过程的教学目的在于培养、提高学生的思维能力，而思维能力属于智能范畴，对思维过程的研究和教学，离不开对人的智能的研究.

教育的目标就是培养人，而更明确的表述就是要整体上提高每一个受教育者的素质层次，进而提高受教育群体的整体素质层次.人的素质是有层次的，智能也是有层次的.人的智能层次一般可用一个梯形的层次结构来描述.

人的智能的第一个层次，也是一个重要的、基础性的层次，就是对知识的记忆，也就是人的记忆力.

由于知识是人通过感官获取的，可以通过神经系统输入大脑进行信息储存，因此知识对于人的智能来说是客观存在的.而智能主要体现人的大脑功能，因而不能简单地就将知识看作人的智能的组成部分，而应将与知识信息的获取、储存、显现相联系的记忆力看作是人的智能的组成部分.

知识构成了人的智能的基础，我们培养人，提高人的素质，发展人的智能，无一不是从传授知识、获取知识开始的.随着所掌握知识水平的提高，人的智能当然也就取得了相应的提高和发展.因此，我们的社会都会从各个方面来教育和引导人们，尤其是学生要认真读书，刻苦学习，如“人要像海绵吸水一样获取知识”“行万里路，读万卷书”“读书贵在坚持，不可一曝十寒”“少年不知勤学苦，老来方悔读书迟”，等等.

人将通过感觉器官获得的信息输入大脑，并在大脑中进行储存，这就是记忆.但记忆显然并不是人获取知识的最终目标，人在对知识进行记忆以后，还要根据某种需要，将记住的信息（实际上已经是具有相当的量的信息）经过选择以后再显现出来，这样的思维活动就是记忆显现性思维.

当人们对智能的认识仅仅处于知识、记忆层次的时候，人们就会将对智能

的要求归结为:识、记.识指的就是知识、认识,记指的就是记忆、记住.此时,我们的教育处于知识教育的阶段,或者说识记教育的阶段.识记教育的最根本问题就是将教育,尤其是将教学仅仅看作知识的传授、灌输、获取和记忆,教师的任务就是教和讲,于是就出现了“满堂灌”“注入式”的教学形式,而学生的任务就是学、听、背、记,于是也就出现了死记硬背的现象.

教育是追求效果、质量的,考试是检查、评定教育效果、教育质量的最重要的手段.而要实施考试、评价,首先需要的就是标准.由于识记教育的阶段所追求的目标就是“识”和“记”,因此考试的要求也就自然地落到这两个字上,只要记住了,背出来,在考卷上写出来,就可得到优良的评价和得分.今天,我们的教育和教育质量评价中出现的相当一部分问题实际上就是源于对“识”和“记”作为目标的追求.

任何一门课程的学习都有相当量的课时数和教学内容,但考试只能在很短的时间内(通常都是 1 至 2 小时)完成,所以我们的考试都是一种以局部考核来评价整体的模式.命题者只能在涵盖量非常广的教学内容中选择(有时还是随机地)某些“内容点”进行命题.而从应考的角度来说,大多数学生是很难将一门学科的内容全部记住、背出来的,只能将有限的时间、精力放在自己认为重要的内容上,进行学习和复习,这就逐渐演变成一种猜题和押题的现象,猜中了、押中了,考试成绩就会收获极大值,甚至可以在付出很小代价的基础上实现.这种现象的出现,实际上进一步放大了专注于“识”和“记”的评价模式所造成的种种消极的现象与问题.

知识是智能的基础,但不是智能的全部内涵.然而长期以来,我们对人的教育与培养却都是偏重于知识的传授、记忆及相应的考试.多位著名的华裔科学家在比较中外大学生的素质差异时,有一种共识,就是中国留学生在国外学习的初期,在学习上、尤其是在参加考试方面,都会表现出明显的优势,但在独立承担研究项目、确定研究课题等方面,却缺少必需的综合能力.这种现象实际上也就是我国教育所追求的目标——长期偏重于知识、偏重于考试的典型表现.教育目标偏重于知识的传授和知识的获取,就会将相当数量的受教育者培养成偏重于读书和记忆的人.“两耳不闻窗外事,一心只读圣贤书”,就是对他们最典型、最

形象的描绘.

识记教育追求的目标是将知识信息向大脑进行输入和储存，但对人的大脑功能来说，输入的信息是会从大脑中消失的，这就是遗忘.遗忘是教学过程中必然会发生的一种普遍现象.出现了遗忘现象后，怎么办呢？人们能采取的对策和方法，就是将知识信息重复输入，直到记住为止，于是就出现了读一遍忘了，就读两遍；读两遍忘了，就读三遍、五遍；再忘了，就读十遍、二十遍；再不行，就读五十遍、一百遍等现象."读书破万卷，下笔如有神""熟读唐诗三百首，不会作诗也会吟"，就是这样一种学习现象的真实写照.

由于知识是信息，而信息有量的概念，因此人获取知识也有量的概念，这种量的概念决定了向人的大脑输入信息的量即人获取的信息量基本与时间成正比.也就是说，当我们不考虑人在记忆信息过程中出现的遗忘现象和在记忆中所需要的理解等因素时，人所获取的信息量与所花费的时间的关系可以用一条正比例曲线模型来描述.

人获取的知识量与时间之间的正比例关系与人们解决遗忘造成的消极后果的方法是完全吻合的，这也就决定了人们接受知识时出现的非常普遍的行为，就是将知识信息一遍一遍地、反复地向大脑输入，以强化记忆.

知识是人的智能发展的基础，但如果对人的智能的发展要求仅仅处于知识和记忆的层次上，那么显然是不够的.即使从教育本身的要求来看，我们可以看到有不少学生，他们的学习是从背知识、背概念、背定理、背公式开始的，现在甚至有的学生已发展到背例题、背习题集、背辞典的程度，然而却还是不会自己独立地做题目.这些学生不可谓不努力，不可谓不刻苦，但就是无法在学习上取得质的突破，究其原因就是他们的思维能力和解决实际问题的能力不能达到与学习要求相适应的程度.

一个人在社会上生存、发展、成就事业，仅仅掌握知识是远远不够的，还有比知识和记忆层次更高、更重要的要求.所以，对人的智能的认识和研究就发展到了第二个层次，这就是技能以及对技能的熟练掌握.

技能是指人完成某一项专门活动的本领.例如，小学生学习自然数的乘法运算，就是一种专门的活动，能完成这样一种活动的本领就是一种技能.

技能有三个基本特征:可以用明确的语言来表述;有先后的顺序;可以反复训练.在教学中,任何一项教学内容和要求只要符合这三个特征,就可以断定是技能.

例如,初中代数有一个教学内容是公式法解一元二次方程.有的老师是这样进行教学的:“同学们,用公式法解一元二次方程,怎么做呢? 大家听好:第一,将方程化成标准形式;第二,将求根公式默出来;第三,将标准方程中的系数 $a$、$b$、$c$ 找出来,抄在下面;第四,将系数 $a$、$b$、$c$ 代到求根公式中去;第五,计算,求得的结果就是方程的根.”如果学生还不会,那就要重新再讲一次;如果学生都会了,接下来就要进行反复的训练.所以,上述用公式法解一元二次方程的教学活动,就是在技能层次上的教学活动.

根据以上介绍,我们可以看到,从教学角度而言,技能是可以用确切的语言传授、示范的;而从学的方面来说,则是可以模仿、操作、训练的.

由于技能是可以用明确的语言来表述的,而且是有先后顺序的,因此在教学中,技能是能够而且是必须讲清楚的.长期以来,我们对教师都提出了要讲正确、讲清楚的要求.讲正确的实质是教学内容的科学性问题,这也是一名教师必备的基本素质.而讲清楚呢? 在实际教学工作中,我们发现不少教师自己认为是讲清楚了,但到学生中去了解一下就会发现实际并非如此.在技能的部分,就是要将可以用明确的语言来表述的、有先后顺序的内容一步一步地讲清楚,而绝不是只将结果告诉学生就算讲清楚了.

当人们对智能的认识从知识、记忆的层次发展到技能层次的时候,就会将对智能的要求归结为:学、练.学指的就是学习、学会,练指的就是训练直至熟练掌握.同样,这时相应的教育发展阶段就是学练教育阶段,教师在教学中明确地提出了“精讲多练”的要求.

在基础教育阶段,知识通常都表述为基础知识,技能通常表述为基本技能,因此就出现了“双基”的概念.

人们掌握任何一种技能都有一个从不会到学会的过程,这时候就像是出现了一次质的飞跃一样.如果用函数曲线来描述的话,就好像是一条曲线一下子升了起来.而在学会以后,就进入了反复训练的阶段,于是就出现了掌握技能的熟

练程度的不断提高，这条曲线的走势就会继续向上，同时我们也会发现，伴随着掌握技能的熟练程度的提高，其提高的幅度却在逐渐减小.所以，这条曲线会逐渐趋于平缓，渐渐达到技能熟练程度的峰值，此后无论再进行怎样的刻苦训练，也很难再显著提高，实际上就是进入了一种“冻结”状态.如果用一条函数曲线作为模型来描述这种发展规律的话，就是一条对数曲线型的轨迹.

人们学习和掌握技能所呈现的对数曲线型的规律，是一条非常重要的规律.在教育教学工作中，许多学生的发展，乃至许多教师的发展，遵循的就是这条对数曲线型的轨迹.

技能训练所遵循的对数曲线型的轨迹，对我们的教学工作和教学质量的提高也有很强的控制作用.我们已经知道，“题海战术”是“双基”教育阶段的异化表现，但“题海战术”并不是提高教学质量的灵丹妙药，即使从应对考试的要求来看，“题海战术”也不是必定有效、必定成功的.每年我们都可以看到许多学校、许多教师也是采取了“题海战术”的方法，但并没有得到令人满意的结果.究其原因，在于技能的训练并不是重复的遍数越多越好，因为当学生的技能掌握达到一定的熟练程度以后，就会进入“冻结”状态，之后再进行大量重复性的训练基本上不会再显现效果.要改变这种状态的唯一办法，就是要改变他们的思维方式，提高他们的思维层次.

在教学活动中，如果对技能过多地进行重复训练，尤其是在进入了“冻结”状态后，就会出现两个主要问题：一是学生在体会到自己再怎么努力，也无法再取得进步时，就会失去学习的动力，甚至产生消极想法，出现消极心理；二是技能在熟练训练的过程中，动作行为会逐渐进入自动化的状态，形成条件反射，形象性表述就是进入“滚瓜烂熟，对答如流”的状态.然而，这种训练是以将人的思维过程抹去作为代价的，由此而产生的直接后果就是思维能力的弱化.

由此可见，对人的智能发展的要求，仅仅达到技能的层次也是不够的.

人的智能的第三个层次就是能力.能力是指人完成某一项综合活动的本领.分析问题和解决问题是一项综合性活动，因此分析问题和解决问题是一种能力上的要求，也就是通常讲的分析问题和解决问题的能力，其核心内涵是思维能力，所有的分析问题直至解决问题都是思维活动的结果.

我们已经知道，技能的一个基本特征就是可以用明确的语言来表述，但能力的特征是难以用明确的语言来表述的，也就是“只能意会，不可言传”，这也就说明能力是不可以传授和示范的，我们只能通过教学活动来培养、提高、发展学生的能力.但是，怎样培养？怎样提高？怎样发展？显然就很难用明确的语言讲清楚.

教师在教学活动中的基本形式就是讲授，而能力又恰恰是难以言传的，这种矛盾就决定了培养能力之艰难.一位优秀教师之所以优秀，常常表现为能够将难以言传的能力要求巧妙地通过明确的语言表述出来，这也可以说是教学的一种最高境界.

能力所具有的“难以言传”的基本特征，决定了能力的培养遵循的不是“教师教，学生学；教师示范，学生模仿”的模式，而必须要经过“摸索、尝试、探索、飞跃”的过程，在这一过程中还会出现困难、挫折和失败.人的能力的培养、发展在起始阶段常常是非常缓慢的，需要有一个积聚的过程.在能力发展的积聚过程中，由于投入的精力、作出的努力不易很快见到成效，因此也常常是一个经受磨炼，克服困难、百折不挠的阶段.但是，随着这种积聚过程的不断进行，能力的发展会逐渐进入良性发展的轨道，显现出越来越快的发展态势，甚至可进入高速增长的阶段.人的能力的发展变化过程如果也用函数图像作为模型来描述的话，就是一条指数曲线型的轨迹.

在教学中我们可以发现，许多学生在培养和发展能力的过程中遵循的也就是这条指数曲线型的轨迹.在开始学习的阶段，能力的发展和提高甚至包括学习成绩的提高都不是很明显的.而随着能力的逐步提高，就能解决不少别人弄不懂的题目，而在解决这些有难度的题目的过程中，他们的能力也会发展得更强，这就是进入了良性发展的状态.在教学活动中，学习较好、学习能力较强的学生容易受到教师的注意和关心，教师对他们的提问也较多，同时在学生中也总是出现学习有困难或解不出题目的学生去问学习较好、能力较强的学生的现象，他们经常要讲一遍甚至讲几遍，于是经常会在一种思维效率较高的状态下进行学习和锻炼，而学习能力一般甚至比较差的学生就很少得到这样一种在思维效率较高状态下进行学习的机会.长此以往，能力强的学生能够解决许多综合性较

强、难度较大的题目，并在此过程中进一步提升其能力，也就促使其进入良性发展的轨道.

人在发展过程中出现的对数曲线型轨迹和指数曲线型轨迹，分别表述了技能发展和能力发展的不同特点，实际上也表述了两类不同学生的发展走向.显然，对一个人的发展成才来说，这两种模式是各有优缺点的，遵循技能发展轨迹的发展，在起始阶段有明显的优势，但从长远来看，是要趋于“冻结”状态的；遵循能力发展轨迹的发展，从长远来看是有发展优势的，但在起始阶段却没有优势可言，更多遇到的恰恰是挫折和困难.

因此，人们很自然地就会想到，能不能找到一种培养人才的最佳模式，能兼取两者的优势，克服各自的不足，实际上也就是将两条曲线叠加到一起，哪一段有优势就取哪一段？

当我们将技能发展曲线叠加到能力发展曲线上以后，就能发现起动时还是遵循技能发展的一段曲线，这实际上也就是我们通常讲的加强基础，加强基础知识的学习，加强基本技能的学习和训练.当加强到一定阶段时，要及时转轨，转到能力发展曲线的轨迹上去，这就是培养人才的最佳发展模式.

人的科学发展，就是要使每一个人的发展，尤其是有十年以上工龄的员工，当然包括有十年以上教龄的教师，不是遵循这条对数曲线的轨迹，而是摆脱这条对数曲线的束缚，取得继续向上发展的动力，这是最为重要的，即每一位教师、每一位学生都走在这条人生发展的最佳曲线上.

显然，对教育事业的发展来说，接下来最重要、最关键的问题就是怎么样使我们的学生、包括我们的老师走在这条最佳发展曲线的轨道上.在这条最佳发展曲线上，有一个对人的发展乃至对人生的发展都有重要意义的拐点，它决定了人生发展的两条完全不同的轨迹，它是一个“失之毫厘，差之千里”的点，是人生道路上人在素质层次上分道扬镳的点，这个点如此之重要，我们将它称为“领悟点”.

于是我们就可以得到一个结论：如果一个人只关注加强基础，却不能越过这个领悟点，也就是我们通常所说的缺少悟性的话，那么他就会沿着这条对数曲线轨迹的惯性发展而进入“冻结”状态，而只有越过这个领悟点的人，才能进

入能力发展的良性态势.

那么,怎样越过领悟点呢? 领悟是思维的结果,但并不是所有的思维活动都能进入领悟的态势.也就是思维对领悟来说,是必要的,但不是充分的.

能力的核心内容就是思维能力,而思维能力发展和升华的标志就是领悟.没有思维的层次,就没有研究的层次,就没有成果的层次,就没有事业成功的层次,也就没有人生成功发展的层次.

人的能力发展在越过领悟点的时候,通常是以突然发出的“噢”为表现形式的.就是当人们在思考、思索一个问题,常常会伴随着“噢”的一声,而迎来思维上的质的突破和飞跃,迎来对事物的本质乃至发展真缔的领悟.正是在这样的基础上,我们可以发现,一个人的能力的发展,是和他在思维的基础上发出的“噢”的次数成正比例的,即和他完成领悟飞跃的次数成正比例的.当然,这个性质是无法用逻辑推理的方法来进行证明的,只能通过实践来进行验证、检验.

在我们的教学活动中,经常有学生提出:“老师,这道题目我不懂.”有的教师就会问:“你什么地方不懂? 你想到什么地方想不下去了?”有的学生就会回答这道题目的条件是什么,结论是什么,他是怎么想的,想到这里他想不下去了.教师一听,就会讲:“接下去应该这样想——”常常教师还没有讲两句话,学生就会说:“噢……! 我想出来了.”显然这位学生真的懂了,伴随着这一声“噢”,他越过去了,教师下面的话都不需要讲了,再讲也可能是多余的话了.也有的学生,当教师问:“你什么地方不懂?”他们的回答是:“我都不懂.”面对这样的回答,许多教师没有办法,只能完整地讲一遍,而讲完以后常常还是要问一问:“你懂了吗?”有的学生会马上回答:“我懂了.”实际上可能根本没有懂,因为他没有发出“噢”的声音,怎么会懂?! 所以我们可以这么说,懂和不懂,“噢”是分水岭.我们可以发现,一个班级里,理解能力较好的学生和理解能力较差的学生的差别往往就在于,好的学生的学习状态,就是在学习过程中,经常不断地在发出“噢……! 我明白了”“噢……! 原来是这个道理”“噢……! 我想出来了”,而理解能力较差的学生呢? 一年、两年,三年、五年,他从来也不发出一声“噢”.

当人们对人的智能的认识和追求,从技能发展到能力层次以后,对人的智能的要求,也可以归结为两个字,就是“思”和“悟”.思就是思维、思考、思想,悟就

是领悟、悟性.这样,我们的教育也就发展到了思悟教育的阶段.我们通常所说的素质教育,在培养、发展智能的范畴内,就是智能教育,也就是在“双基”教育的基础上再加上思悟教育.

分析问题和解决问题的能力的本质是思维能力,因此智能教育所追求的目标从根本上讲就是要在加强“双基”的基础上,使智能的发展提高到以思维为本质属性的更新、更高的层次,其最重要的内容就是思维形式、思维方法、思维过程、思维能力和思维活动规律性的培养和教育.

人的智能的最高层次,即人的能力的最高层次,就是创新能力.创新能力是人的一种层次最高、最积极、最具有社会价值而且是不断推动人类社会向前发展的能力.

创新能力是人完成创新创造活动的能力.换一种通俗的说法,创新能力指的就是人在社会实践活动中,产生新的想法,做出新的产品,创作出新的作品的能力,以及由此而需要的意志、毅力等品质.

创新能力可以分为三种情况,这是根据“新”的含义的三种情况来确定的.其一是指对人类社会来讲是新的、是前所未有的,可以称之为特殊才能的创新能力;其二是指对社会来讲并不新,然而对社会的某一个特定群体来说是新的、出类拔萃的,可称之为群体比较的创新能力;其三是指对社会来讲并不新,但对个人自己来讲是新的、前所未有的、个人独创的,可称之为自我实现的创新能力.

根据创新能力的特征以及创新能力的三种情况,我们可以看到:创新能力是人的一种自然属性,亦即创新能力,人皆有之.

创新能力的核心就是创新思维能力,这是因为人的一切创新创造成果都是想出来的,是创新思维的结果.

虽然创新能力有三种情况,但长期以来,人们已经形成了一种观念,只要一提到创新能力,就很自然地和特殊才能的创新能力联系在一起,总认为只有具备特殊才能的人士才有创新能力,而绝大多数普通人似乎没有创新能力,显然这种观念对于在整体上提高人的素质,特别是提高人的创新能力有一种很强的抑制作用.因此,我们在教育工作中不断地强化“创新能力,人皆有之”的观念,使广大学生对自己所具备的创新能力建立起自信心,就显得非常重要.

综上所述，思维能力的培养对人的智能发展有着决定性的意义，而这种思维能力的培养又必须建立在知识获取、技能训练的基础上，甚至还包括某些能力培养的基础上.因此，作为培养思维能力最重要的部分——思维过程的培养和教学，也同样建立在这一基础上.

## 第四节　思维过程教学的科学性要求

我们知道,教育应该遵循的一条基本原则就是科学性原则,所以我们对思维过程的讨论、研究和教学,也必须遵循教育的科学性原则.

科学的本质是什么?科学就是运用范畴、定理、定律等思维形式反映现实世界各种现象的本质和规律的知识体系,是反映自然、社会、思维等领域的客观规律的知识体系,科学的本质就是事物发展变化的规律性.

科学的本质是规律性,人类在探索规律性、研究规律性、总结规律性的基础上,发现了规律性,认识了规律性,掌握了规律性,并按照规律性办事.这样,人们的行为才能处在科学的层面上.

我们教师也应该遵循教育的科学性原则,在课堂上讲科学,讲规律性.然而,不少教师在课堂教学活动和课外教学活动中经常讲的并不是科学,而是经验.例如,许多数学教师都有切身的体会,在教学活动中,学生常常问:"老师,你拿到这个问题后是怎样想的?你怎么想得出来,我怎么就想不出来?"而我们许多教师的回答却是:"主要靠多做题目,积累经验,到时候自然就会想."教师的回答是在讲科学吗?显然不是,教师在这里讲的是经验.于是,学生就出现了困惑:"老师,我 100 多道题目做下来了,但是我还是不会想."又如,在平面几何教学中,学生问教师问得最多或者频率最高的一个问题就是:"老师,添辅助线有规律吗?"学生的提问显然是在追求科学,然而许多教师讲的是:"添辅助线有常法而无定法."在这样的教学状态下,要大多数学生都能学好显然是很困难的.在没有办法的情况下,许多教师也就只能讲:"添辅助线,就是拿到一道题目以后,先添一条试试看,不行再添一条试试看,多试几次总会成功的."面对这样的回答,学生同样会遇到困惑:"我已经试了十多次了,但还是没有成功地添出来."显然,教师在这里讲的还是经验.所以,我们也就可以得出这样的结论:我们的平面几何教学

还处于经验教学的层面，这也就是几何难教难学的症结所在.正因为这样，要从根本上解决几何教学难教难学的问题，即平面几何教学改革、教学研究的目标和方向，就是要从经验教学层面发展上升为科学教学层面.

为了更好地实现从经验教学发展上升为科学教学的目标，我们首先讨论经验和科学几个基本的特性.

人的认识是从实践开始的.人在社会实践中首先获得的是感知，是感性认识，这种感知和感性认识显然还没有达到、甚至还没有进入科学的层面，这时候的人的认识主要表现形式就是经验，这也就是人的认识的经验性.对许多人来说，人生的发展过程就是一个不断地积累经验的过程.积累经验纵然重要，但同时我们又应该清醒地认识到，认识仅仅停留在经验的层面上是不够的，因为经验是有局限性的，而且经验也并不一定会上升为科学.

那么，经验和科学的区别是什么呢？

根据我们的研究，经验的特征可以用通俗易懂的语言来表述，主要是：知其行，不知其为什么行；张三行，李四未必行；今天行，不知道明天行不行；今天行，不知道何时再次行.

经验的第一个特征是知其行，不知其为什么行.显然，我们如果能做到知其行，也知其原因，那当然也就进入科学的层面了.长期以来，我们都要求自己学习也好，做学问也好，都要达到“不但要知其然，而且要知其所以然”的境界，讲的也就是这个道理，而我们通常说的“不求甚解”，也就是仅仅停留在经验的层面上.在我们传统的教学中，有的教师也知道采用这样的方法教效果肯定好，但却说不上来原因.像这样的例子实在是太多了，其最集中的表现，就是教师只讲怎么做，而很少甚至不讲这种做法是怎么想出来的.

经验的第二个特征是张三行，李四未必行.显然，我们如果能做到张三行，李四肯定行，那当然也就进入科学的层面了，甚至能做到张三行，李四肯定不行，显然也能进入科学的层面了.

在几何教学中，教师经常会遇到这样的情况，有的方法对一道题目甚至对一批题目也可以讲得头头是道，似乎是天衣无缝，但换一道题目就行不通，实际上也就是这个道理.例如，许多教师在讲到三角形的中线时，都会给学生讲“出现

了三角形的中线时，通常可以将中线延长一倍来进行证明”.然而在实际教学中，教师举出来的实例，确实在将中线延长一倍后，就可以解决问题.但学生回去自己做题目时，同样是出现了三角形的中线，延长一倍以后却没有用，解决不了问题，而这时恰恰是不需要将中线延长一倍了.这也就说明“出现了三角形的中线时，通常可以将中线延长一倍来进行证明”仅是一种经验而不是科学.

经验的第三个特征是今天行，不知道明天行不行.显然，如果今天行，可以得到明天肯定行，甚至今天行，能断定明天肯定不行，那当然也能进入科学的层面了.例如，有的教师今年教的这一届学生很成功，教育质量很高，考试成绩也很好，但在接过新一届的学生时，就不知道三年以后这届学生到底行不行，说明这位教师的教育也还是一种经验的教育.

经验的第四个特征是今天行，不知道何时再次行.显然，如果今天行，可以确定地得到何时再次行，那当然也就进入科学的层面了.

事物的发展都是波浪式地前进，螺旋式地上升的.如果在此过程中意识不到、感受不到这样一种波浪或螺旋，那也就是在经验的层面上.也就是说，事物的发展会有高峰，也会有低谷，问题不在于是否出现高峰或低谷，重要的是要明白何时会重上高峰或重陷低谷.例如，有的学生在小学学习阶段的成绩很优秀，但到初一、初二年级的时候，出现了学习成绩明显下降的现象，我们的许多教师在面对这样的学生时，也无法知道他们中的每一个人将在什么时候成绩会再次上升到优良甚至优秀的水平；教师采用某种有效的教学方法去进行教学的时候，同样不知道应用这样的教学方法后他们中的每一个人将在什么时候成绩会再次上升到优良甚至优秀的水平.

在对经验的四个特征进行讨论的基础上，我们可以发现并得到科学的三个重要特性.

1. 科学的因果性

科学的因果性指的是事物和事物之间、现象和现象之间具有的原因和结果的关系，是一种建立在逻辑推理基础上的，可以从一事物、现象推导出另一事物、现象的关系.科学的因果性是科学规律性的一种重要的表现形式.

人的任何一种认识为什么是科学的，为什么是具有规律性的，就因为是讲

得出道理的，是讲得清楚因果关系的；是知其然，而且是知其所以然的；是知其行，也知其为什么行的.反过来，对任何一种现象，只要你是讲得清楚道理的，是讲得清楚因果关系的，人们也就会相信这是科学的.

科学的成功，不是在于根据条件对应该推得的结论的不断追求，就是在于根据已经获得的结论对能推得这一结论的条件或原因的不断追溯.科学的发展和进步，就是两种基本模式：一种是由因导果式的不断推进，一种是执果溯因式的不断追溯.一方面，许多科学家所撰写的论著中，有着大量的根据条件、公理、性质推得结论的论述，它们是科学的重要组成部分.例如，科学家采用微积分的方法，计算出第一宇宙速度、第二宇宙速度和第三宇宙速度.显然，科学的这些进步和发展就属于由因导果的模式.另一方面，科学家所从事的研究活动中，还有相当一部分是根据结果去追溯原因的.例如，对人生病的原因的追溯和探求，对细菌、病毒以及治疗的药物、方法的不断发现、发明，造就了作为科学的医学的发展和进步，显然，科学的这些进步和发展就属于执果溯因的模式.

数学为什么是科学，就是因为数学是建立在严密的公理系统的基础上，数学学科领域内所发现的任何性质和结论，都要经过严密的推理加以论证，而在推理过程中的每一个步骤也都是讲得清楚道理的.反过来，对于每一个由严密的推理所得到的性质或结论，也可以追溯其中的道理，可以将来龙去脉讲得清清楚楚.所以人们也就相信数学这门学问是科学的.由此我们也就明白一个道理，数学教学要从经验教学发展到科学教学的阶段，关键的问题就是要解决不但要知其然，而且要知其所以然，要将其中的因果关系讲清楚.教师要将功夫下在“为什么会这样想”上，学生则应不断地对自己追问“为什么”“什么道理”，即使一道题目已经做出来了，也要回过头来搞清楚每一步是怎样想出来的和为什么会这样想.因为这里展示的就是思维过程的内容，所以展示思维过程所使用的每一句话，一定要建立在科学的因果性的基础上，也就是一定要讲清楚道理.

2. 科学的普遍性

科学的普遍性指的是所有的研究对象、事物、现象所具有的共同性质.一种性质、一种判断、一个结论对某一范畴内的所有问题或研究对象来说都是正确的、适用的，所显示出的就是规律性.事物发展中的普遍存在性、普遍适用性就是

一种反映事物发展的本质的、规律性的联系.科学的普遍性也是科学规律性的一种重要的表现形式.

科学家对社会的重要贡献和价值,不仅在于发现了某一个具体的事实,更为重要的常常在于发现了普遍成立、普遍适用的规律.

由此可见,我们的教学要从经验教学发展到科学教学的阶段,教师所追求的目标不仅是解出某一道或某几道具体的题目,而是要找到能解决某一类题目的具有普遍性的方法.同样,我们的教育不是为了追求培养出少数尖子学生,而是要追求将学生普遍培养成才的教学形式、方法和途径,要使在某一部分学生身上取得成功的教育手段和方法具有普遍的价值和意义.

展示思维过程,首先需要讲清楚是怎样一步一步想出来的,而这每一步应该是在经验层次上的展示,还是应该在科学层次上的展示,结论是不言而喻的,思维过程的教学必须落实到科学的普遍性上,要介绍普遍成立、普遍适用的思维过程,也只有真正做到这一点,我们在教学中展示的才是真正的思维过程.

例如,在几何问题中,出现了两个具有公共顶点的正方形时,就必定出现旋转型的全等三角形,找这对全等三角形的方法是将由公共顶点发出的两组相等线段两两组成全等三角形,这种性质是对任意两个具有公共顶点的正方形都成立的,这就是科学的普遍性的展现.

3. 科学的预测性(也可称为预见性)

科学的预测性指的是对事物或研究对象在未来的一定时间段内发展变化的态势、趋势的准确的估计、评价和论断.人的任何一种认识的科学性、规律性,很重要的一点就体现在对事物未来的发展态势可以作出准确的预测.

在实际工作和生活中,能作出准确的科学预测的人,才能将成功的主动权牢牢地掌握在自己的手中.传统的几何教学之所以是处于经验教学的阶段,就因为长期以来我们对几何问题的分析思考无法进行准确的预测.有的问题即使已经想了好几步,推理了若干步,也无法预测正确的结果会在何时、在哪里出现,而真正到正确解答出现的时候,又常常产生纯属偶然、运气好的感觉.科学的预测性,就是要解决今天行、明天也要行的问题,当然这里的“明天”是一种泛指的意思.人在思维的过程中,常常需要对思维发展的方向、轨迹和可以期望取得的

成果作出估计，如果这种估计是具有科学性的，那么当思维推进到一定节点的时候，期望取得的思维成果好像就会在预定的位置迎候着你的思维的到来，这也属于科学的预测性.

我们国家在成功发射载人航天飞船的时候，都可以准确地预报这艘飞船将在什么时候返回和在什么地点着陆，而在预定的时间和地点，飞船准确地回收着陆，这一事实就足以使人们相信这是科学，这里展示的同样是科学的预测性.

落实到每一个具体的问题上，科学的预测性同样会表现在思维过程中.对一个问题的思考，出现什么情况时，就会产生对问题的发展进行预测的需要，正确的预测结果又是怎样想出来的，怎样确保预测得到的结果是正确无误的，都落到了思维过程上.

今天，我们教育的改革和发展的一个重要目标，就是要从经验教育向科学教育发展，那么具体怎么做呢？实际上就是要从以上三个方面入手，努力取得进展和突破，而其中任何一个方面所取得的实绩和进步，都代表着从经验教育向科学教育的提高和迈进.

# 第二章　基本图形分析法

# 第一节　基本图形分析法

## 一、从传统分析方法到基本图形分析法

教育要追求思维过程的培养、训练和形成，而要讲清楚每一个问题的思维过程，最重要的前提就是以具有科学性的、能揭示规律性的思维方法为基础理论.对平面几何这门学科而言，基本图形分析法就是这样一种能揭示思维方法规律性的分析方法.

长期以来，平面几何是一门让教师感到难教，让学生感到难学的学科，至今仍是制约着教育质量提高和学生成才的"瓶颈".现在社会上流行"不能输在起跑线上"，但没有输在起跑线上而倒在几何线上的学生何止成千上万.

那么，几何教和学之难到底难在哪里？实际上就难在三个字，即"规律性".在教学中，教师之所以不断地讲"怎样想的？主要是多做题目，积累经验，到时候自然会想""添辅助线有常法而无定法""添辅助线就是拿到一道题目，先添一条试试看，不行再添一条试试看，多试几次总会成功的"，根本的原因就是没有办法掌握几何问题分析方法的规律性和添加辅助线的规律性.事实上，教师所作的这样一种回答，无法从根本上解决学生在学习过程中的困惑.学生在学习几何的过程中，最迫切想要知道的就是几何问题思考方法、分析方法的规律性，最迫切想要知道的就是几何问题中添加的每一条辅助线是怎样想出来的.由于传统的几何教学无法对学生的这些期待给出直接的、明确的、准确的、科学的回答，学生在几何学习过程中的畏惧心理难以得到根本上的消除，这也就是几何难教、难学之根本原因所在.

图形是几何研究的对象，任何离开对图形、图形性质研究的分析方法，要揭示几何问题思考方法、分析方法的规律性都是十分困难的.在教学中，要取得成

功也是十分困难的.当然,这里所指的成功是对大多数学生来说的成功,而不是仅对少数特别优秀的学生而言.

任何离开对图形、图形性质的研究的分析方法,都不可能在几何教学中取得成功,这实际上包含着对传统几何分析方法的否定.现在许多教师在教学中实际采用的分析方法大多还是传统的证题术,这种方法的经典语言就是:"怎么证明两条线段相等呢?要证明两条线段相等,可以应用全等三角形;可以证明这两条线段都和第三条线段相等;可以应用等腰三角形;可以应用平行四边形;可以应用正方形;可以应用比例性质,等等."而在实际教学中,没有一位教师是能够列举完的,一般都是列举了几条就结束了,那为什么列举到这里就"刹车"了呢?教师显然无法讲清楚.

从思维的角度来看,这里应用的是列举的方法,就是属于扩散思维的范畴,于是首先出现的问题就是在具体教学活动中,尤其是在课堂教学过程中,无论哪一位教师都不可能进行完美的、毫无遗漏的列举,这样的方法在理论上是存在缺陷的.另外,即使有教师进行了完美的、毫无遗漏的列举,将所有的可能性都列举了出来,但由于其中的相当一部分可能性对这个具体问题的解决来说,又是毫无价值的,因此许多教师也会感到没有必要去作这样详尽的列举,这也确实会包含许多无效的思维和努力.然而实质性的问题还不仅是在这里,关键的问题是,当你列举出了这样许多方法或可能性以后,对这道具体的题目来说,你是怎样作出选择的,是根据什么来作出这样的选择的.

从思维形式上讲,前面的列举属于扩散思维,而后面的比较和作出选择属于集中思维.当列举出许多可能性以后,就需要进行集中思维对这些可能性进行逐一比较,才能最后作出选择.但在实际教学工作中,这几乎是不可能做到的.而在没有进行充分的、完整的比较之前,就作出的选择,显然就会面临讲不清楚道理的困惑,也就是只能用"经验"来作出选择.

从上述讨论中,我们可以发现传统的几何分析方法也是在对几何问题进行分类讨论.然而,分类也有科学的分类和经验性的分类.分类,就是将一个集合分成若干个真子集.科学的分类必须满足两个条件:所有的真子集的并集应该是全集;所有真子集的两两的交集应该是空集.在传统的几何证明方法进行的分类

中，就以证明两条线段相等的问题为例，首先所有的几何问题就是一个全集，而全等三角形、两条线段都和第三条线段相等、等腰三角形、平行四边形、正方形、比例性质等，就是进行分类后得到的一个个真子集.那么，首先要满足的就是所有的真子集的并集应该是全集.显然，由于我们无法进行完美的、毫无遗漏的列举，这些真子集的并集就不可能达到全集，总是会出现遗漏.我们能够做到的就是尽可能地逼近全集，在经验的层面上也总是努力通过尽可能多的列举来逼近全集，符合这一条.这样，只要对所有的真子集都进行了讨论并使问题得到解决以后，全集的问题也就得到了解决.然而，严重的问题是出现在所有的真子集的两两的交集应该是空集这一条上.实际上证明两条线段相等的问题，是所有这些真子集的公共的交集.由于交集不是空集，因此在这个公共的交集中的证明两条线段相等的问题，就不知道应该属于哪一个真子集，就不知道应该用哪一个真子集的方法来进行讨论和论证，一旦选用某一个真子集的方法来进行讨论和论证就会说不清楚道理.这就是同样两道证明两条线段相等的问题，为什么一道题目选择用全等三角形来进行证明，而另一道却不用全等三角形，甚至完全不考虑，这其中的道理，常常无法自圆其说.

由于采用传统的证题术的方法来进行教学有时很难讲清楚分析方法，因此有的教师转而采用传统的证题法的方法来进行教学.对此，我们可以先看如下的一道例题：

已知：$\triangle ABC$ 中，$D$ 是 $BC$ 的中点，$\angle BAD=\angle CAD$.（图 2－1－1）

求证：$AB=AC$.

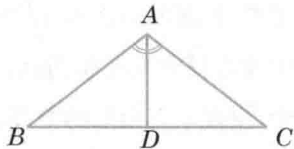


图 2－1－1

这是一道非常基础，而且几乎所有的几何教材都选用的例题，也是几乎所有的几何教师都必定要讲授的一道例题，但用传统的证明方法却会遇到很大的困难.

一般教师都是这样讲的："同学们，这是一道证明两条线段相等的问题，我们可以想办法把这两条线段 $AB$ 和 $AC$ 放到两个三角形中，然后证明这两个三角形全等.（这段话本身是有问题的，为什么要证明两条线段相等，你就会想到要将这两条线段放到两个三角形中，然后证明这两个三角形全等呢？不是还有许

多方法吗，为什么偏偏就选了这种方法，这两者之间有什么因果联系呢？）现在这两条线段可以看作是$\triangle ABD$和$\triangle ACD$的对应边，我们可以想办法证明这两个三角形全等.已知$D$是$BC$的中点，$BD=CD$，$\angle BAD=\angle CAD$，$AD=AD$，但出现的是两边和其中一边的对角对应相等，还不能证明这两个三角形全等.那怎么办呢？我们就可以想办法造一对全等三角形.（这段话本身也是有问题的，还不能证明这两个三角形全等，那怎么就想到要造一对全等三角形呢？）那么怎么来造这对全等三角形呢？”实际上问题就到了关键点上，这时许多教师接下去都是这样讲：“同学们，这道题目的条件中还给出$AD$是$\triangle ABC$的中线，在几何问题中，出现了三角形的中线，通常是将中线延长一倍，于是延长$AD$到$E$，使$DE=AD$……”接下来问题看上去也就可以解决了，然而关键的问题是什么？实际上就是这个“通常”，什么是“通常”？没有一位教师能讲清楚这个“通常”的准确意义是什么，学生当然无法在实际问题中去领会这个“通常”的意思以及应该怎么应用.

上面这道例题出现了三角形的中线，将中线延长一倍后问题是可以解决的，但接下来一道题目，也是出现了三角形的中线，但却不延长了，而且恰恰延长了以后发现是没有用的.这里的道理是什么？说得清楚吗？进一步研究可以发现，在出现三角形中线的众多问题中，要通过延长中线一倍来解决问题的只是很少的一部分，大部分的问题都不是通过延长中线一倍来解决的，这就说明我们在教学中经常说的“通常”恰恰“不通常”.从科学性的角度来分析，我们在将特殊的方法作为一般的、普遍的方法来介绍时，我们的教学就容易出现问题.事实上，教师讲的话在学生的心目中具有相当高的权威性，常常就是“真理”，现在教师讲了“在几何问题中，出现了三角形的中线，通常是将中线延长一倍”，学生听了，记住了，同时也毫无疑义地接受了，但回去做习题时，却发现总不能解决问题.几次下来，学生对教师的信任会逐渐淡化，甚至消失.实际上，将中线延长一倍所反映出的仅仅是教学中的一种现象，是一种解题的结果，代表的仅仅是一种经验而不是科学.

回顾以上讨论过程不难发现，所有的讨论都是离开了图形而进行的.这实际上也就是传统的几何分析方法存在的最根本、最严重的缺陷.尽管对每一道具体的几何问题来说是有图形的，但就分析方法的整体而言，却是离开了图形来进行

的.就以证明两条线段相等的问题来说,尽管我们可以列举种种方法,但却能发现每一种方法,既不解决应在怎样的图形中来应用,也不解决出现了什么样的图形时选用.这也就是为什么传统的几何分析方法无法揭示几何问题思考方法、分析方法的规律性的道理.

一道几何问题,都会以一个图形以及这个图形所具有的各种性质为研究对象.而出现在几何问题中的每一个几何图形,无论是怎样的简单还是复杂,经过观察和分析,都一定可以发现这样一个事实,即它是由一个或者若干个最简单、最基本也是最重要的图形组合而成的.

为了说明问题,我们先剖析一道例题:

已知:$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$AD\perp BC$,垂足是 $D$,$BE$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,过 $E$ 作 $EF\perp BE$ 交 $BC$ 于 $F$,$EG\perp BC$,垂足是 $G$.(图 2-1-2)

求证:$DG=\frac{1}{4}BF$.

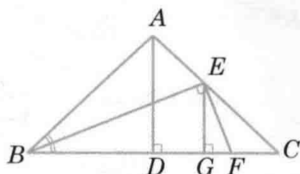


图 2-1-2

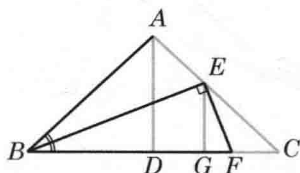


图 2-1-3

分析:本题的条件中出现了 $BE$ 是 $\angle ABC$ 的平分线和 $EF\perp BE$,即 $EF$ 是角平分线 $BE$ 的垂线(图 2-1-3),所以可应用等腰三角形中重要线段的基本图形进行证明.这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的,而现在角平分线 $BE$ 的垂线 $EF$ 与角的一边 $BC$ 已经相交,而与另一边 $BA$ 尚未相交,所以就应将它们延长到相交,也就是延长 $FE$ 交 $BA$ 的延长线于 $H$(图 2-1-4).就可得$\triangle BEH\cong\triangle BEF$,$BH=BF$,$EH=EF$.这里应用的等腰三角形中的重要线段就是这个问题的第一个基本图形(图 2-1-5).

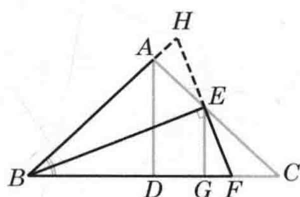


图 2-1-4

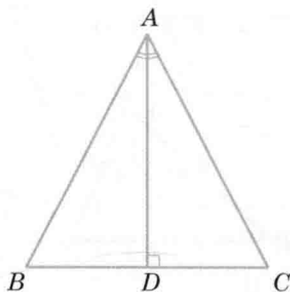


图 2-1-5

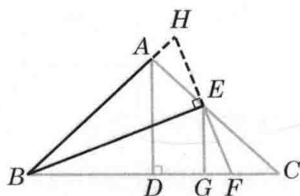


图 2-1-6

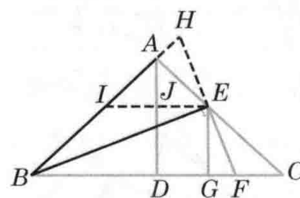


图 2-1-7

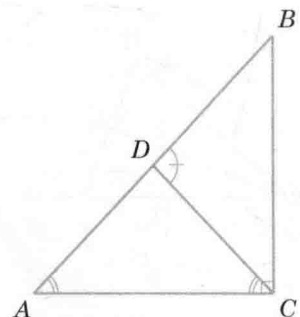


图 2-1-8

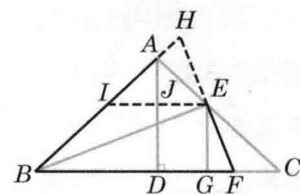


图 2-1-9

在证明了 $BH=BF$ 后，本题要证明的结论 $DG=\frac{1}{4}BF$，就转化为 $DG=\frac{1}{4}BH$，这是两条线段之间的倍半关系，而由于 $\angle BEH=90^{\circ}$，因此这两条线段之间的倍半关系中的倍线段 $BH$ 就成为直角三角形 $BEH$ 的斜边，从而就可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明.现在图形中有直角三角形而没有斜边上的中线(图 2-1-6)，所以应将斜边上的中线添上，也就是取 $BH$ 的中点 $I$，联结 $EI$ 交 $AD$ 于 $J$(图 2-1-7)，可得 $EI=\frac{1}{2}BH$，问题就转化为要证 $DG=\frac{1}{2}EI$.这里应用的直角三角形斜边上的中线就是这个问题的第二个基本图形(图 2-1-8).

因为 $I$ 是 $BH$ 的中点，$E$ 是 $FH$ 的中点，就出现了两个中点，所以就可以应用三角形中位线的基本图形进行证明(图 2-1-9)，即得 $IE\parallel BF$.这里应用的三角形中位线就是这个问题的第三个基本图形(图 2-1-10).

在证明了 $IE\parallel BF$ 后，就出现了 $IE$ 是 $\triangle ABC$ 内一条边 $BC$ 的平行线段，于是可应用由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形进行证明，也就可得 $\triangle AIE\backsim\triangle ABC$(图 2-1-11)，而由已知 $AB=AC$，$AD\perp BC$，垂足是 $D$，可得 $AI=AE$，$AJ\perp IE$，垂足是 $J$，并可得 $J$ 是 $IE$ 的中点，$JE=\frac{1}{2}IE$.这里应用的平行线型相似三角形就是这个问题的第四个基本图形(图 2-1-12).

现在的问题就转化为要证明 $DG=JE$，由于条件

还给出 $EG \perp BC$，垂足是 $G$，于是 $EG /\!/ JD$，而 $EJ /\!/ GD$，从而应用平行线的性质就能证明 $DG=JE$，分析就可以完成.这里应用的平行线就是这个问题的第五个基本图形(图 2-1-13).

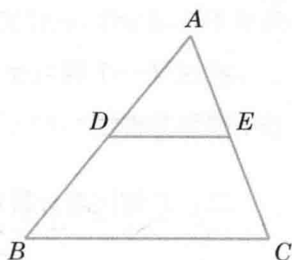


图 2-1-10

通过对这一例题的分析可以发现，像这样一道比较复杂的几何问题(图形)实际上是由五个基本图形组合而成的，分析并找到这五个基本图形，再应用这五个基本图形的性质，就可以使问题得到解决.这样一种分析方法就是基本图形分析法.

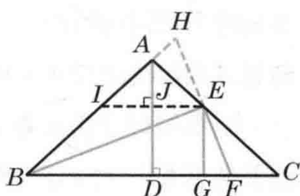


图 2-1-11

我们可以再任意选择一个几何问题，将它的图形进行剖析，也可以发现它是由几个基本图形组合而成的.我们可以将这几个基本图形和上述五个基本图形放在一起进行比较，比较的结果可能是两组基本图形中没有一个是相同的，也可能是有一个或若干个是相同的.如果两组基本图形中没有一个是相同的，就将这两组基本图形合并到一起，成为一组新的基本图形；如果两组基本图形中有一个或若干个是相同的，那么每两个相同的基本图形就只保留一个，然后也和其他的基本图形合并到一起，成为一组新的基本图形.显然这组新的基本图形的个数比原来的一组增加了.我们将这个过程继续进行下去，很快我们就可以发现，在这个过程的开始阶段，随着讨论题目数量的增加，基本图形的数量也在不断地增加，但是渐渐地就发现增加的速度在逐渐放缓，再接下去，有可能在讨论了几道、十几道甚至几十道题目以后，才增加一个新的基本图形.如果这个过程继续进行下去，那么到一定的时候，就会发现在剖析更多的题目的过程中，基本图形

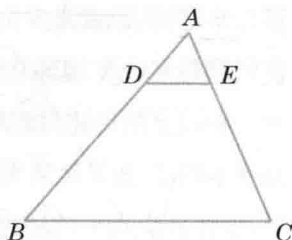


图 2-1-12

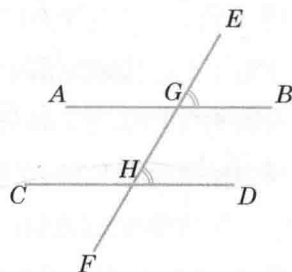


图 2-1-13

几乎不再增加了，这样实际上我们就得到了一个基本图形的集合或者系统.

在这样一个研究探索的过程中，实际上也就得到了一种新的分析方法，即基本图形分析法.

## 二、几何问题分析规律性和基本图形分析法

什么是基本图形分析法呢?

基本图形分析法就是在几何学科中，根据问题的条件和结论，分析并找到组成这个几何问题的一个或若干个基本图形，再应用这些基本图形的性质，使问题得到解决的几何分析方法.

基本图形分析法是一种建立在对图形和图形的性质的认识、分析、应用基础上的思考方法和分析方法.任何一个几何图形，都是由一个或若干个基本图形组合而成的，当若干个基本图形组合成为一个几何问题的时候，许多图形的性质就隐去了，所以对几何问题的分析和思考过程实质上就是要将这一综合过程逆过来进行，也就是要剖析并找到这些基本图形，并应用这些基本图形的性质，使问题得到解决.基本图形分析法就是在这样的基础上诞生的.

在以上的论述过程中出现了基本图形这个概念，为此我们应首先明确什么是基本图形.如果仅从文字上解释，基本图形应该是组成几何图形的最基本的元素，这样就会很自然地想到点、线段、弧、三角形这些构成几何图形的最简单、最基本的元，而基本图形分析法最重要的内涵就是要应用这些基本图形的性质去解决问题，这就必须要回答每一个基本图形在什么条件下应用和怎样应用的问题.而恰恰是在这两个问题上，点、线段、弧甚至三角形都无法讲清楚，可见基本图形并不是几何图形的“基本元”.当然，基本图形也不是几何题目，不是许多复杂的几何图形，它们应该既具有组成几何图形的基本元的功能，又必须是具有特定性质和应用条件的图形.

于是就有:在几何问题的分析中，组成一个几何问题的图形中最简单、最重要、最基本的，但又是具有特定的性质，能阐明应用条件和应用方法的图形，我们把具有这种特定性质的图形称为基本图形.

在对数以千计的几何问题进行图形剖析后，就会发现几何学科中的基本图

形的数量是 30 多个，但就是这 30 多个基本图形的无限组合演绎出了一部能显现无穷变化的平面几何学.这 30 多个基本图形可以分成七大类：平行线、等腰三角形、与圆有关的角、全等三角形、相似三角形、特殊角三角形、与面积方法有关的三角形.

在几何问题的分析过程中，同样要回答一个问题：在众多的几何问题中，当遇到一个具体问题，为什么会想到要应用某个基本图形而不是应用另外一个基本图形呢？这也就涉及每一个基本图形的应用条件.那么，应用条件从什么地方得来呢？显然这取决于每一个基本图形的特征，取决于每一个基本图形不同于其他基本图形的本质属性，取决于这个基本图形和其他基本图形的本质上的差异.所以，要探求、发现每一个基本图形的应用条件，首先就要研究和讨论每一个基本图形的特性，然后，根据这些特性来归纳、发现并最终得到每一个基本图形的应用条件.进一步研究可以发现，在所讨论的基本图形的特性和随之得到的应用条件中，除了很少量的且必须要用数量关系表达的性质以外，相当一部分都是对位置关系的表述，这也是基本图形分析法和传统的几何分析方法的一个重要区别.在根据应用条件确定并找到基本图形以后，相应的应用方法就是应用基本图形的性质，一般都比较容易确定.实际上，应用方法是由基本图形确定的，基本图形一经确定，应用方法也就相应地确定了.因此，基本图形分析法的内容对每一个基本图形而言，都由基本图形、基本图形的性质、位置特征、应用条件和应用方法五个部分组成.

## 三、怎样应用基本图形分析法添辅助线

接下来要解决的问题就是：怎样应用基本图形分析法添辅助线？

添辅助线是教好、学好平面几何的关键问题.然而，长期以来，它又是平面几何教学中最难解决的难题.一个不争的事实就是平面几何的教育质量在大范围内一直不尽如人意，而不少学生又产生了很强的畏难心理以至放弃几何学习，这也就造成了数学教育界出现了一种祈求通过降低教学要求、删减内容以摆脱这种困境的倾向.这种现象不仅在我国存在，在国外也相当普遍.其实，这种回避问题的实质和要害的做法，并不是解决问题的根本、有效的办法，也不是摆脱平

面几何教学困境的正确出路.内容删减了,要求降低了,平面几何内容的科学体系支离破碎了,但教学质量并没有明显提高,学生的畏难心理以至放弃几何学习的现象依旧存在.所以,关键的问题不在于内容的深浅、多少,不在于教学要求降低多少,而在于揭示分析方法的规律性,揭示添辅助线的规律性.因此,几何问题最大的困难就在于添辅助线,任何一种成功的几何分析方法都必须对添辅助线的问题作出正确的、科学的、正面的、直接的回答,必须正确地揭示并使学生能够掌握添辅助线的规律性.

应用基本图形分析法,怎样解决添辅助线的规律性问题呢?

应用基本图形分析法,首先就是要根据问题中出现的应用条件,找到基本图形,显然这时还不存在添辅助线的问题.接下来则是要应用基本图形的性质来解决问题,这时就会出现如下两种情况.

一是所有分析、找到的基本图形都是完整的,这样应用这些基本图形的性质就不会有什么困难,问题自然也就得到了解决,显然这时也不存在添辅助线的问题.二是在分析、找到的基本图形中,有一个或者若干个是不完整的,这样在应用这些基本图形性质的时候显然就会发生困难,因为基本图形不完整,相应的性质就不能应用,从而就使我们在应用这些基本图形的性质之前,必须要先将不完整的基本图形补完整,这就出现了添辅助线的需要.由此也可以发现,添辅助线的实质就是将不完整的基本图形补完整.

根据以上对添辅助线的基本方法的讨论,我们还可以发现,应用基本图形分析法来讨论添辅助线的问题时,我们的着眼点已经不再聚焦于作为图形的局部的"线"上,而是着眼于一个完整的"图形"上.因此,我们认为添辅助线也已经不再仅仅是一个添线的问题,其实质应是一个补图的问题,是一个基本图形完整化的问题.也就是说,添辅助线实质上是基本图形完整化的必然结果.在长期的教学实践过程中,许多教师都有体会,学生只要根据应用条件找到基本图形,就不怕添不出辅助线,而且也必然会出现辅助线的正确添加超前于正确推理、证明的获得的现象.所以,学生学习、掌握了基本图形分析法,也就能体会到只要找到基本图形,辅助线也就必然正确地添出来了的成功喜悦和乐趣.他们也就能在很短的时间里进入"一看就明白,一想就出来"的境界,从而也就从根本上消

除了对几何学习的畏惧心理.对学生来说,基本图形分析法是一种简单易学并容易掌握、应用的方法.

综上所述,基本图形分析法的独创之处,就在于详尽、完整地介绍、剖析了每一个几何问题的思维过程,全面地介绍了每一个几何问题是怎样一步一步想出来的,基本图形也是随着分析过程的进行逐个发现的,辅助线也是随着分析过程的进行、基本图形的发现而一条一条添出来的.

在讨论了应用基本图形分析法添辅助线的基本方法以后,当然还要回答一个问题,这就是:这种基本方法是否解决了几何问题中添辅助线的所有问题?对此我们的回答是还没有.我们只能说凡是涉及基本图形的添辅助线的所有问题都是可以解决的.但在几何问题中,还有一些问题是直接应用基本概念的定义来进行分析,有的问题没有直接与具体的、特定的基本图形相联系的性质,对这些问题的添线方法就不属于应用基本图形分析法添辅助线的基本方法,而是基本方法的必要的、有效的补充.这些补充的方法主要有以下三种.

1. 应用几何概念的定义添辅助线的方法

在几何问题中,经常会出现一些与某一个具体的几何概念有直接联系的性质,或者是直接给出了一些几何概念,这些几何概念又常常可以被用来作为分析、证明的出发点,但在已知条件所给出的图形中,又缺乏构成这些概念所必需的某些线,这时就可以直接根据几何概念的定义将这些必需的线添上,其目的就是使有关的几何概念及其性质能得到应用.这就是应用几何概念的定义添辅助线的方法.

2. 将多边形问题,尤其是梯形问题转化为三角形问题来讨论的添辅助线的方法

在几何问题中,三角形是边数最少、最简单也是最基本的多边形,几何问题所讨论和研究的对象的许多性质也都是围绕着三角形来讨论和展开的,也是以三角形的性质为基础的,而平面几何中的基本图形也几乎都是集中在三角形上.因此,对于几何问题中出现的许多有关多边形的问题,在分析时的基本思路或方法就是将多边形的问题转化为三角形的问题来进行研究和讨论,这时也就会出现添辅助线的问题.

将多边形问题转化为三角形的问题来进行分析的方法,主要是添对角线、

平移对角线、平移腰、添加梯形的高、延长两腰到相交等，当然对每一种添线方法来说，同样要讲清楚应用条件.

3. 将线段或角改变位置的添辅助线的方法

当几何问题中出现了具有某种等量关系或数量关系的线段、角，但又是位于不易建立数量关系的位置上时，就需要将线段或角改变位置.改变线段或角位置的基本方法是平移和旋转.当需要改变位置的线段或角与圆或等腰三角形有联系时，优先考虑旋转；当需要改变位置的线段或角与圆或等腰三角形没有直接联系时，优先考虑平移.

对于以上介绍的三种添辅助线的方法，都可以看作是辅助性的、补充的方法，其主要理由有二：一是这些添辅助线的方法都不是普遍适用的方法，它们都只适用于某些特定的问题，也只能在这些特定的问题中应用，应用的面也比较小，而前面介绍的基本方法则属于普遍适用的方法；二是对一个具体的问题来说，应用这些方法中的某一种方法添出辅助线后，通常仅仅是完成了整个问题分析中的某一个特定的步骤，以后（在有些问题中也可以包括以前）的分析，直至整个问题的解决和分析的完成，还是要应用基本方法来完成.

在完成了以上的讨论以后，我们就可以提出以下关于几何问题中添加辅助线的基本观点.

首先，几何问题中的添辅助线是有规律性的.

对添辅助线的规律性的揭示和认识，是应用基本图形分析法的几何教学与传统几何教学的分水岭.在几何教学中，对于学生常常向教师提出的问题，如“添辅助线有规律吗”“添辅助线的规律性是什么”“这条辅助线是怎样想出来的”“为什么您会想到这样添辅助线，而我就想不到”，等等，教师都必须对这些问题作出正确的、正面的回答，当然能做到这一点的前提就是要能揭示添辅助线的规律性.

由于应用基本图形分析法来添辅助线可以从根本上解决添辅助线的规律性问题，因此在这样一个前提下，我们就可以明确地阐明这一基本观点：平面几何问题中的添辅助线问题是有规律性的，是有规律可循的.

其次，几何问题中的每一条辅助线都是分析的结果，对每一条辅助线都能

够讲清楚它是怎样想出来的.

几何问题中所有的辅助线是从哪里来的？它们都是由人的大脑想出来的，是人们经过分析、思考得到的.因此，几何问题中的每一条辅助线都应该是分析的结果，从而对每一条辅助线，我们也就能够明白它是怎样想出来的.在平面几何教学中，教师应对每一条辅助线想出来的过程进行剖析并展示在学生的面前，在一个几何问题的分析过程中，在任何一个步骤上，都要经受得住学生的提问并给予正面和正确的回答.

再次，几何问题中的每一条辅助线都是分析的结果，它们应该随着分析过程的进行，分析到哪里，添到哪里，即逐步添加出来.

几何问题中出现的辅助线是从哪里来的？尤其是当一个问题中出现了多条辅助线时，这些辅助线是一下子、一起添加出来的吗？结论是否定的.几条辅助线在几乎所有的问题中都是不可能同时添出来的，这里有一个先后的次序，只能是一条一条、有先有后地想出来或添出来.对有些问题来说，即使是只添一条辅助线，它也是一段一段、有先有后地想出来、添出来，从而也就只能随着分析过程的进行和发展逐步添加，逐步完成，也就是分析到哪里就添到哪里，这样就能够完整地向学生展示每一条辅助线是怎样想出来的，整个问题的解决又是怎样一步一步想出来的.在这样一个前提下，我们还可以进一步发现，几何问题中的辅助线是既不能少添（这样问题就会解决不了），也不能多添（多添加的部分就会说不清楚道理）.

最后，几何问题中添辅助线的规律性，只要经过认真学习，是可以学会和掌握的，所以平面几何也是可以学好的.

由于平面几何问题中的添辅助线问题是有规律性的，而且教师已经可以用明确的语言将这种规律性来向学生进行介绍和教学，因此学生就会体会到能够学、学得会，这就从根本上消除了学生心中长期以来对平面几何的学习，实质上就是对添辅助线问题学习的畏惧心理.这样，学生学好平面几何，掌握平面几何的方法也就是必然的结果.

在进行了上述讨论以后，教师在面对学生有关辅助线问题的提问时，再作如下的回答就是不可取的：

几何问题中的辅助线无规律可言，主要靠多做题目，积累经验，到时候自然会添；

几何问题中的添辅助线有常法而无定法；

拿到一个几何问题要添辅助线时，可以先添一条试试看，不行就再添一条试试看，多试几次总会成功的.

在几何教学中，教师使用还是不使用上述教学内容和教学语言，实际上也就构成了基本图形分析法和传统的几何思考方法的分水岭.

平面几何的教学和学习问题，包括平面几何中的添加辅助线问题，同世界上任何一门学科一样，是有规律性的，而且这种规律性也一定是可以认识和掌握的.如果我们的教师和学生都能掌握这些规律，学会和掌握正确的分析方法，从而具备和形成一定的分析能力，那么我们所遇到的许多新的几何问题也就可以迎刃而解，平面几何教学质量的大范围提高的目标也是一定可以实现的.

基本图形分析法问世以来，作为一种有显著成效的几何教学和几何学习的方法，一直受到许多学校领导、教师、学生和家长的重视，国内先后有 600 多所学校采用基本图形分析法进行教学，教学质量都取得了显著提高.近 30 年来，参加过基本图形分析法教学培训的教师近两万名，他们中数十人获得特级教师称号，数百人次获得优秀园丁奖，不仅培养了一大批优秀的人才，也为形成一支优秀的骨干教师队伍打下了坚实的基础.

实践证明，基本图形分析法是一种能使学生在启迪思维、增长兴趣、发展智能、提高素质的基础上，取得优异成绩的卓有成效的方法.

正因为这样，所以——

当你遇到几何学习的困难时，基本图形分析法就是你最好的老师；

当你不知道怎样添辅助线时，基本图形分析法会给你最好的启迪；

当你希望破解几何学习的玄妙时，基本图形分析法会交给你最好的钥匙；

以基本图形分析法为基础理论和基本内容的《几何王》初中平面几何学习软件，必将成为你在几何学习或几何教学中最好的助手.

# 第二节　等腰三角形

## 一、等腰三角形

等腰三角形部分一共有四个基本图形，第一个基本图形就是等腰三角形.

等腰三角形的基本图形和图形的性质如下：

在$\triangle ABC$中，

$AB=AC\Leftrightarrow\angle ABC=\angle ACB$（图2-2-1）

$AB=AC$，延长$BA$到$D$　$\Leftrightarrow\angle DAC=2\angle ABC=2\angle ACB$（图2-2-2）

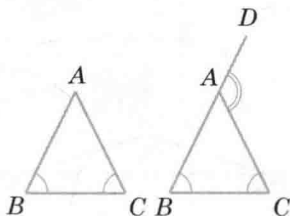


图2-2-1　图2-2-2

关于基本图形和图形的性质，可以说是所有的几何教材、教学参考书上都有的内容，而且也是绝大多数学生都可以掌握甚至背出来的.然而，重要的问题并不在于这个图形有什么性质，性质当然是要掌握的，但更为重要的是对众多的、甚至是不断变化着的几何题目来说，在什么情况下要想到应用这个基本图形，这个问题就要通过基本图形的应用条件来回答.

就等腰三角形来说，$AB=AC$是两条具有公共端点$A$的相等线段，这就是一种特定的位置关系，也是这两条相等线段所具有的位置特征，所以也就可以得到"在几何问题中，出现两条具有公共端点的相等线段时，就可以应用等腰三角形的基本图形进行证明"，这里的"出现了两条具有公共端点的相等线段"就是等腰三角形这个基本图形的应用条件.

在找到或确定了所要应用的等腰三角形的基本图形后，应怎样应用呢？应用的方法就是利用这两条具有公共端点的相等线段组成等腰三角形.显然，应用方法中就包含了添线方法.就等腰三角形的基本图形而言，这时也出现了两种情

况:一是由这两条具有公共端点的相等线段组成的等腰三角形已经完整地出现,即可直接应用等腰三角形的基本图形的性质进行分析;二是由这两条具有公共端点的相等线段组成的等腰三角形还没有出现,也就是只有两条腰而没有底边,那就要将等腰三角形的底边添上.这里所介绍的就是应用方法.

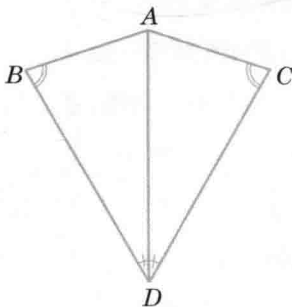


图 2-2-3

【例 1】已知:$AB=AC$,$\angle ABD=\angle ACD$,联结 $AD$.(图 2-2-3)

求证:$\angle ADB=\angle ADC$.

分析:条件给出 $AB=AC$,观察图形,可以发现这是两条具有公共端点 $A$ 的相等线段,于是它们可以组成一个等腰三角形的基本图形.

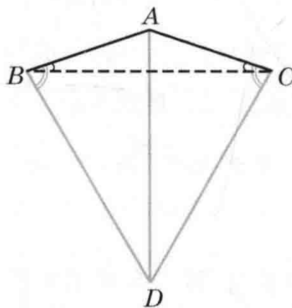


图 2-2-4

但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边,所以应将底边添上,也就是联结 $BC$(图 2-2-4),于是就可推得$\angle ABC=\angle ACB$.

又因为条件给出$\angle ABD=\angle ACD$,所以就可得$\angle DBC=\angle DCB$,从而又可发现$\triangle DBC$ 也是等腰三角形,所以又可推得 $DB=DC$.

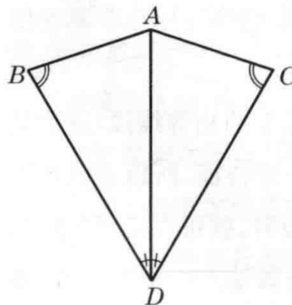


图 2-2-5

由于现在已经有 $AB=AC$,$DB=DC$,这两组相等线段是关于 $AD$ 成轴对称的,因此可应用轴对称型全等三角形的基本图形进行证明.根据图形的轴对称部分,就能找到这对全等三角形应是$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$(图 2-2-5),全等的条件是 $AB=AC$,$DB=DC$ 和 $AD=AD$(公共边),所以$\angle ADB=\angle ADC$ 就得以证明.

限于篇幅,对于在出现了两条具有公共端点的相等线段,可以添加等腰三角形的基本图形进行证明的情况,和由于图形中这个等腰三角形出现了两条腰而

没有底边，所以应将底边添上的添线方法，我们只介绍一道例题.在《几何王》初中平面几何学习软件中，只要按照以下步骤操作，就可以将所有应用这种添线方法的习题全部搜索出来.

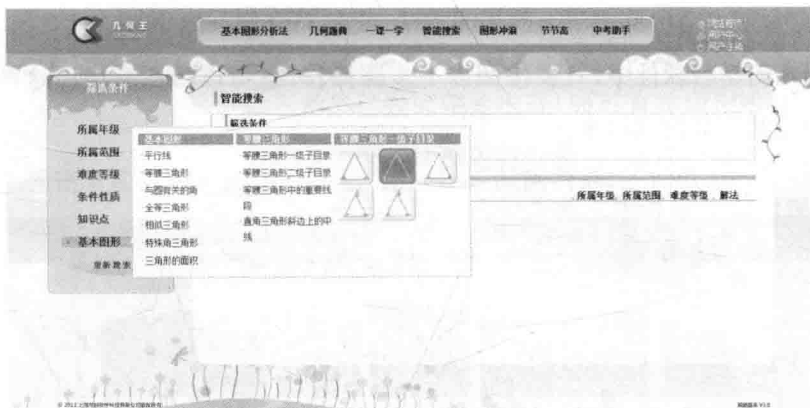
（1）登录《几何王》软件网站：www.001jihe.com，输入用户名及密码.




（2）点击“智能搜索”.



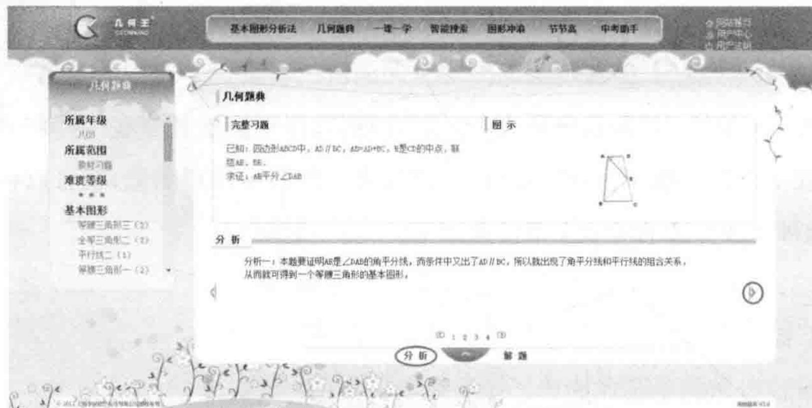

（3）点击左边栏筛选条件中的“基本图形”，鼠标依次悬停在“等腰三角形”→“等腰三角形一级子目录”，最后点击“等腰三角形—(2)”图标，就可以将所有应用这种添线方法的习题全部搜索出来.




（4）教师就可以在搜索结果中，根据教学的实际需要点击所选习题.




（5）点击后，软件跳转至“几何题典”页面，点击“分析”→“下一步”图标，就可以浏览这道习题的全部思维过程.



## 二、角平分线和平行线的组合

等腰三角形部分的第二个基本图形就是角平分线和平行线的组合得到的等腰三角形.

$AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,$EF /\!/ AB$ 且交 $AC$、$AD$ 于 $E$、$F \Rightarrow EF = EA$(图 2-2-6)

$AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,$EF /\!/ AD$ 且交 $AC$ 于 $F$,交 $BA$ 的延长线于 $E \Rightarrow AE = AF$(图 2-2-7)

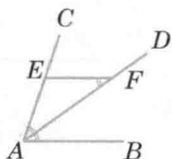


图 2-2-6

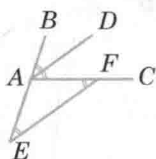


图 2-2-7

这个基本图形的特点就是角平分线和平行线的组合,一定得到等腰三角形,也就是角平分线、平行线和等腰三角形中,只要任意出现其中的两个,第三个性质就一定出现.

那么,应该到哪里去找等腰三角形呢?这时就出现了以下两种可能.

当出现的是角的一边的平行线时,这条平行线就应和角的另一边以及角平分线相交组成等腰三角形,如果图形中尚未相交的话,就应延长到相交.

当出现的是角平分线的平行线时,这条平行线就应和角的一边以及另一边的反向延长线相交组成等腰三角形,如果图形中尚未相交的话,就应延长到相交.

【例 2】已知:$\triangle ABC$ 中,$BD$ 是$\angle ABC$ 的平分线,$CD$ 是$\angle ACB$ 的平分线,$BD$、$CD$ 相交于 $D$,过 $D$ 作 $EF /\!/ BC$ 交 $AB$ 于 $E$、交 $AC$ 于 $F$.(图 2-2-8)

求证:$EF = BE + CF$.

分析:本题条件中给出 $BD$ 是$\angle ABC$ 的平分线,$EF /\!/ BC$,于是出现了角平分线和平行线的组合,所以就一定构成一个等腰三角形的基本图形.那么,应该到哪里去找这个等腰三角形呢?

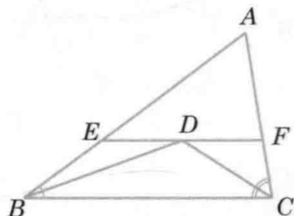


图 2-2-8

由于 $EF$ 是角的一边 $BC$ 的平行线,所以它应和角的另一边 $BA$ 以及角平分线 $BD$ 相交构成等腰三角形,从而就可以得到 $EB = ED$,$\triangle EBD$ 是等腰三角形(图 2-2-9).

根据同样的道理,由 $CD$ 是$\angle ACB$ 的平分线,$EF /\!/ BC$,又可以得到 $FD =$

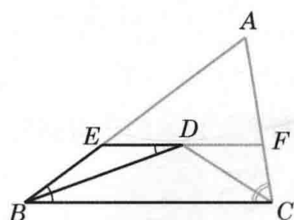


图 2-2-9

$FC$,所以分析就可以完成.

【例 3】已知:$\triangle ABC$ 中,$AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,$E$ 是 $AB$ 上的一点,$AE=AC$,过 $E$ 作 $EF \parallel BC$ 交 $AC$ 于 $F$,联结 $DE$、$CE$.(图 2-2-10)

求证:$CE$ 平分$\angle DEF$.

分析:本题要证明 $CE$ 是$\angle DEF$ 的平分线,而条件给出 $EF \parallel BC$,出现了角平分线和平行线的组合,于是一定构成一个等腰三角形的基本图形.那么,应该到哪里去找这个等腰三角形呢?

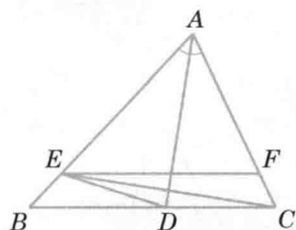


图 2-2-10

由于 $DC$ 是角的一边 $EF$ 的平行线,所以它应和角的另一边 $ED$ 以及角平分线 $EC$ 相交构成等腰三角形,从而就可以得到$\triangle DCE$ 是等腰三角形(图 2-2-11),但由于"$CE$ 是$\angle DEF$ 的平分线"是要证明的结论,所以就要先证明 $DE=DC$.

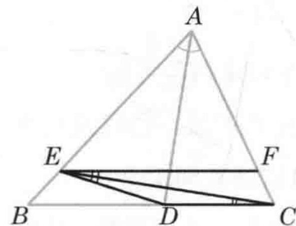


图 2-2-11

由条件 $AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,$AE=AC$,这样就出现了 $AE$、$AC$ 这两条相等的线段和$\angle BAD$、$\angle CAD$ 这两个相等的角关于 $AD$ 成轴对称,于是可应用轴对称型全等三角形进行证明.根据图形的轴对称部分,就可以找到这对全等三角形应是$\triangle AED$ 和$\triangle ACD$(图 2-2-12),全等的条件是 $AE=AC$,$\angle EAD=\angle CAD$ 和 $AD=AD$,就可以完成分析.

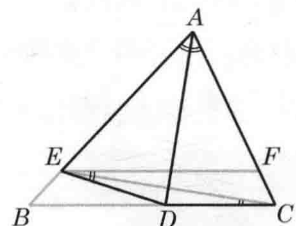


图 2-2-12

【例 4】已知:$\triangle ABC$ 中,$AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,$E$ 是 $BC$ 的中点,过 $E$ 作 $EG \parallel DA$ 交 $AB$ 于 $F$、交 $CA$ 的延长线于 $G$.(图 2-2-13)

求证:$BF=CG=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

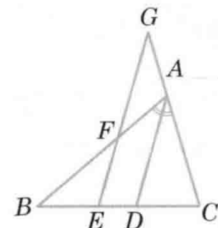


图 2-2-13

分析:本题条件中给出 $AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,$EG \parallel DA$,出现了角平分线和平行线的组合,于是一

定构成一个等腰三角形的基本图形.那么,应该到哪里去找这个等腰三角形呢?

由于 $EG$ 是角平分线 $AD$ 的平行线,所以它应和角的一边 $AB$ 以及另一边 $AC$ 的反向延长线相交构成等腰三角形,于是就可以得到$\triangle AFG$ 是等腰三角形,$AF=AG$(图 2-2-14).

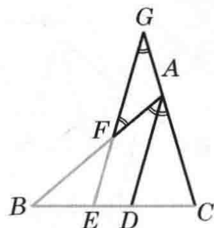


图 2-2-14

这样,结论中出现的 $CG$ 就等于 $AC+AG=AC+AF$,问题就转化为证 $BF=AC+AF$.这是要证明一条线段等于两条线段的和,所以想到应用线段和的定义,将 $AC$、$AF$ 这两条线段接起来.

将两条线段 $AC$、$AF$ 接起来,就出现了两种可能性:将 $AF$ 接在 $AC$ 上与将 $AC$ 接在 $AF$ 上.如果将 $AF$ 接到 $AC$ 上,就出现了前一步是将 $AG$ 折过来成为 $AF$,而后一步又将 $AF$ 折回去成为 $AG$,退回到了原来的出发点,所以这一种情况是不可取的.于是选取将 $AC$ 接在 $AF$ 上,也就是延长 $FA$ 到 $H$,使 $AH=AC$(图 2-2-15),问题就转化为证 $BF=AC+AF=AH+AF=FH$.

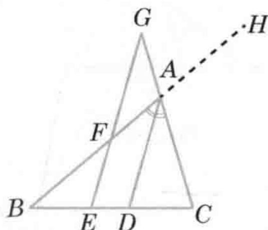


图 2-2-15

但在作出了 $AH=AC$ 后,就出现了这是两条具有公共端点 $A$ 的相等线段,它们可组成一个等腰三角形,而这个等腰三角形只有两条腰而没有底边,所以应将底边添上,也就是联结 $CH$(图 2-2-16),就可得$\triangle ACH$ 是等腰三角形.

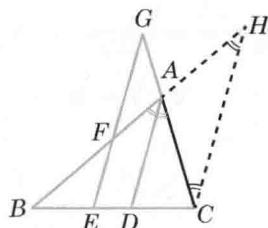


图 2-2-16

而条件给出 $AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,又出现了等腰三角形和角平分线的组合,于是一定得到一组平行线,由于 $CH$ 是与$\angle BAC$ 的一边 $AC$ 以及另一边 $AB$ 的反向延长线相交,因此 $CH$ 应和角平分线 $AD$

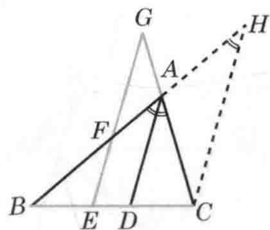


图 2-2-17

平行，等腰三角形顶角的外角平分线一定平行底边，也就是 $AD /\!/ HC$（图 2-2-17）.

而已知 $EF /\!/ DA$，所以 $EF /\!/ CH$.

由条件 $E$ 是 $BC$ 的中点，应用三角形中位线的基本图形的性质就可以证明 $BF=HF$（图 2-2-18），进一步也就可以证明 $BF=CG=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

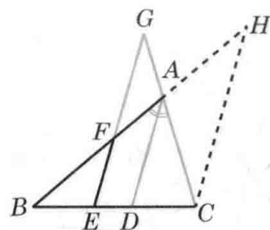


图 2-2-18

本题的分析，最重要的部分实际上就是角平分线和平行线的组合得到等腰三角形的基本图形.而添加的方法是作平行线，由于平行线可以有多种不同的可能，因此本题的分析也会相应地出现多种可能，关键的问题就是搞清楚过什么点作谁的平行线，是作角的一边的平行线，还是作角平分线的平行线，然后就和哪两条线相交，到哪里去找等腰三角形.这几个问题搞清楚了，相应的分析方法也就呈现出来了.

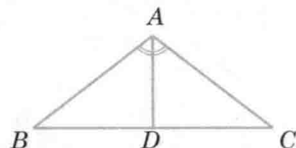


图 2-2-19

【例 5】已知：$\triangle ABC$ 中，$D$ 是 $BC$ 的中点，$AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线.（图 2-2-19）

求证：$AB=AC$.

分析：本题给出了条件 $AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，而要证明的结论为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，于是出现了角平分线和等腰三角形的组合，从而一定可以得到一个平行线的基本图形.

由于图形中尚未出现平行线，因此应先将平行线添上，而在添加平行线时，就可以出现两种可能情况，也就是可以作角的一边的平行线，也可以作角平分线的平行线.

(1) 如果作角的一边的平行线，那么角的一边可以取 $AB$（也可以取 $AC$），于是平行线可过点 $C$ 或点

$D$ 作，这样又出现了两种可能.

① 若选取过点 $C$ 作 $AB$ 的平行线，由于作的是角的一边的平行线，因此就应与角的另一边以及角平分线相交组成等腰三角形，也就是 $AB$ 的平行线应作到和角平分线 $AD$ 相交，于是过 $C$ 作 $CE /\!/ AB$ 交 $AD$ 的延长线于点 $E$（图 2－2－20），从而就可得 $CA=CE$，问题就成为要证 $AB=EC$.

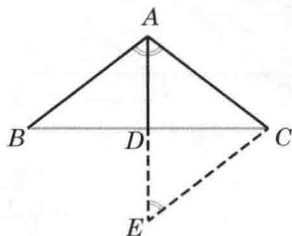


图 2－2－20

再由条件 $BD=CD$，且 $BC$、$AE$ 相交于 $D$，这样就出现了 $BD$ 和 $CD$ 这两条相等线段位于一组对顶角 $\angle ADB$ 和 $\angle EDC$ 的两边，且成一直线，所以就想到要应用中心对称型全等三角形进行证明.根据由过两个端点的平行线与过中点的直线相交得到中心对称型全等三角形的方法，就可以找到这对全等三角形应是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECD$（图 2－2－21），全等的条件是 $\angle BAD=\angle CED$，$\angle ADB=\angle EDC$，$BD=CD$，就可证得 $AB=EC$，所以 $AB=AC$ 就得以证明.

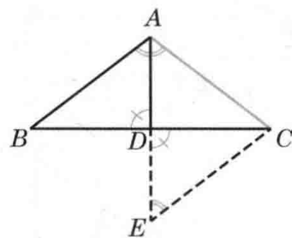


图 2－2－21

② 若选取过点 $D$ 作 $AB$ 的平行线，则过 $D$ 作 $DE /\!/ BA$ 交 $AC$ 于点 $E$（图 2－2－22）.由于现在是作角的一边 $AB$ 的平行线，因此就应与角的另一边 $AC$ 以及角平分线 $AD$ 相交组成等腰三角形，从而可得 $\angle EAD=\angle EDA$，$EA=ED$.

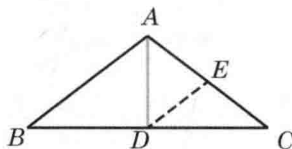


图 2－2－22

又因为条件给出 $BD=CD$，出现了 $DE$ 是过 $\triangle ABC$ 的一边 $BC$ 的中点 $D$ 所作的另一边 $BA$ 的平行线，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明，也就可得 $AE=EC$，从而可进一步推得 $ED=EC$（图 2－2－23）.这样又出现了这是两条具有公共端点 $E$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，应用等腰三角形的性质，就可得 $\angle EDC=\angle ECD$.

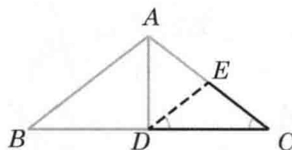


图 2－2－23

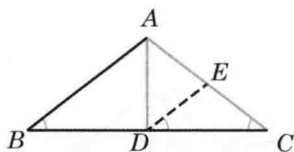


图 2-2-24

而问题是要证 $AB=AC$，这也是两条具有公共端点 $E$ 的相等线段，它们也可以组成一个等腰三角形，问题就成为一个等腰三角形的判定问题，所以就应证 $AB=AC$ 的等价性质 $\angle ABC=\angle ACB$.

这样问题又进一步转化成要证 $\angle ABC=\angle EDC$，而这两个角是 $BA$、$DE$ 这两条平行线被 $BC$ 所截得到的一组同位角，从而可应用与同位角有关的平行线的基本图形的性质，证明 $\angle ABC=\angle EDC$（图 2-2-24），分析就得以完成.

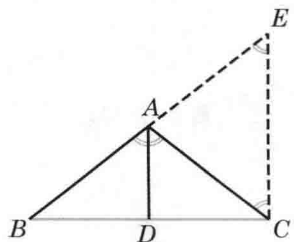


图 2-2-25

(2) 如果选取作角平分线的平行线，那么过 $C$ 作 $CE /\!/ DA$ 交 $BA$ 的延长线于点 $E$（图 2-2-25），由于 $CE$ 是角平分线 $DA$ 的平行线，因此它应和角的一边 $AC$ 以及另一边 $AB$ 的反向延长线相交组成等腰三角形，也就可得 $AE=AC$，这样要证明 $AB=AC$，就转化为要证 $AB=AE$.

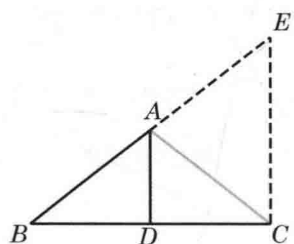


图 2-2-26

又因为 $BD=CD$，出现了 $DA$ 是过 $\triangle EBC$ 的一边 $BC$ 的中点 $D$ 所作的另一边 $CE$ 的平行线，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明，得 $AB=AE$（图 2-2-26），所以分析也得以完成.

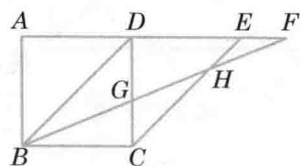


图 2-2-27

【例 6】已知：正方形 $ABCD$ 中，延长 $AD$ 到 $E$，$DE=DA$，联结 $BD$、$CE$，延长 $AD$ 到 $F$，$DF=DB$，$BF$、$CD$ 相交于 $G$，$BF$、$CE$ 相交于 $H$.（图 2-2-27）

求证：$GH=FH$.

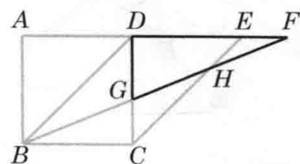


图 2-2-28

分析：本题要证明 $GH=FH$，由于条件中给出 $\angle ADC=90°$，$A$、$D$、$F$ 成一直线，因此 $\angle FDC$ 也等于 $90°$，$\triangle FDG$ 是直角三角形（图 2-2-28）.

这样就出现了 $H$ 是直角三角形 $FDG$ 的斜边 $GF$ 的中点，从而就可应用直角三角形斜边上中线的基本图形的性质进行证明.现在图形中有直角三角形、斜边上的中点，而没有斜边上的中线，于是应将斜边上的中线添上，也就是联结 $DH$（图 2-2-29）.

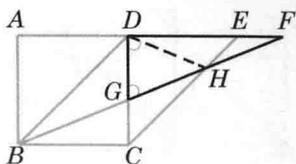


图 2-2-29

这样要证明 $GH=FH$，就应证明 $GH$ 和 $FH$ 都与 $DH$ 相等，也就是证 $GH=DH$、$FH=DH$，进一步可证 $\angle HDG=\angle HGD$ 和 $\angle HFD=\angle HDF$.

由条件 $DF=DB$，这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，即 $\triangle DBF$（图 2-2-30）.又因为已知四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $DF\parallel BC$.这样就出现了等腰三角形和平行线的组合关系，所以必定可以得到角平分线，也就是由 $DB=DF$，得 $\angle DBF=\angle DFB$，再由 $DF\parallel BC$，而两条平行线可以看作是被 $BF$ 所截，又可得 $\angle DFB=\angle FBC$（图 2-2-31），从而推得 $\angle DBF=\angle FBC=\frac{1}{2}\times 45^\circ$.

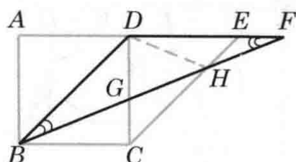


图 2-2-30

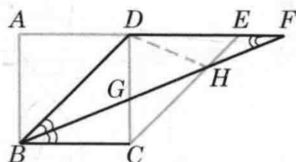


图 2-2-31

在得到了 $BF$ 是 $\angle CBD$ 的平分线以后，由于 $DE\parallel BC$，且 $DE=DC=BC$，因此四边形 $DBCE$ 也是一个平行四边形，于是就有 $CE\parallel BD$.这样又出现了一次角平分线和平行线的组合关系，从而一定可以得到一个等腰三角形的基本图形.由于 $CE$ 是角的一边 $BD$ 的平行线，因此它一定和角的另一边 $BC$ 以及角平分线 $BF$ 相交构成等腰三角形.由此就可以找到这个等腰三角形是 $\triangle CBH$（图 2-2-32），也就可得 $CH=CB$，$\angle CBH=\angle CHB=\frac{1}{2}\times 45^\circ$.

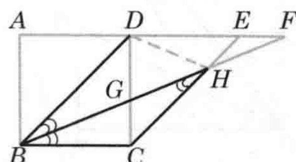


图 2-2-32

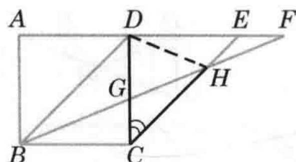


图 2-2-33

又因为四边形 $ABCD$ 是正方形，$CD=CB$，所以 $CH=CD$，这又是两条具有公共端点 $C$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形(图 2-2-33).因为它的顶角$\angle HCD$ 是等腰直角三角形 $DCE$ 的一个底角，应是 45°，所以$\angle CDH=\angle CHD=\frac{1}{2}\times 135°$，而已证$\angle CHB=\frac{1}{2}\times 45°$，所以$\angle HGD=\frac{1}{2}\times 45°+45°=\frac{1}{2}\times 135°=\angle HDG$，$GH=DH$.

最后，由$\angle FDG=90°$，应用等角的余角相等的定理，可得$\angle HFD=\angle HDF$，$FH=DH$，分析得以完成.

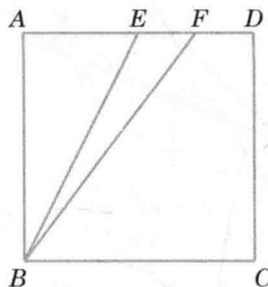


图 2-2-34

【例 7】已知：正方形 $ABCD$ 中，$E$ 是 $AD$ 的中点，$F$ 是 $DE$ 的中点，联结 $BE$、$BF$.(图 2-2-34)

求证：$\angle CBF=2\angle ABE$.

分析：本题要证明的结论$\angle CBF=2\angle ABE$ 是两个角之间的倍半关系，所以可根据角的倍半关系的定义来进行分析，这样就出现了两种可能：作出倍角的一半或者作出半角的两倍.

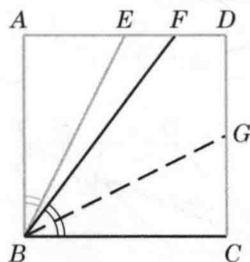


图 2-2-35

(1) 若选作出倍角的一半，即将这个倍角($\angle CBF$)二等分，也就是作出这个角的角平分线后，证明这个角的一半($\angle CBG$)与另一个角($\angle ABE$)相等.于是作$\angle CBF$ 的平分线 $BG$ 交 $CD$ 于点 $G$(图 2-2-35)，问题就转化为证明$\angle CBG=\angle ABE$.

但在作出了$\angle CBF$ 的平分线 $BG$ 后，由题设条件易知 $AD\parallel BC$.于是就出现了角平分线和平行线的组合关系，这样就必定得到一个等腰三角形的基本图形.

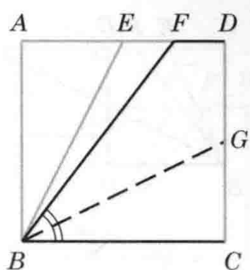


图 2-2-36

由于现在出现的 $FD$ 是角的一边 $BC$ 的平行线，因此它应该与角的另一边 $BF$ 以及角平分线 $BG$ 相交组成等腰三角形(图 2-2-36).而目前图形中 $FD$ 尚未与角平分线 $BG$ 相交，所以应将它们延长到相交，也就是延长 $BG$ 交 $FD$ 的延长线于点 $H$(图 2-2-37)，于是由 $\angle CBG=\angle FBG$ 和 $FH \parallel BC$，$\angle CBG=\angle DHG$，就可得$\angle FBH=\angle FHB$，$FB=FH$.

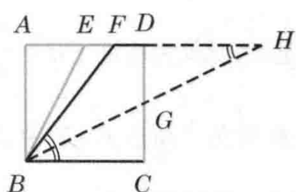


图 2-2-37

由于我们现在要证明的是$\angle CBG=\angle ABE$，观察图形，可以发现要证明相等的这两个角$\angle CBG$ 和$\angle ABE$ 是位于正方形 $ABCD$ 的轴对称部分，因此想到要应用轴对称型全等三角形进行证明.

根据图形的轴对称部分，就可以找到这对全等三角形应是$\triangle CBG$ 和$\triangle ABE$(图 2-2-38).在这两个三角形中，已经出现的条件是$\angle BCG=\angle BAE=90°$，$BC=BA$，所以还缺少一个条件.

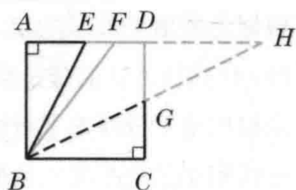


图 2-2-38

由于条件中还给出了 $E$ 是 $AD$ 的中点，即 $AE=\frac{1}{2}AD$，是与 $AE$ 有关的性质，所以第三个条件应证 $AE$ 和它的对应边 $CG$ 相等，也就是要证 $CG$ 是正方形边长的一半，即 $G$ 是 $CD$ 的中点，$DG=CG$.

由于 $CD$、$BH$ 相交于$G$，因此要证明相等的这两条线段 $DG$ 和 $CG$ 就位于一组对顶角$\angle BGC$ 和$\angle HGD$ 的两边且成一直线(图 2-2-39)，从而就可以应用中心对称型的全等三角形进行证明.

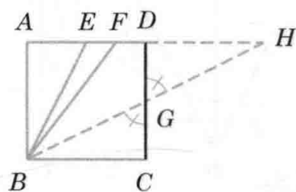


图 2-2-39

那么，到哪里去找这对中心对称型全等三角形呢？根据过两端点 $C$、$D$ 的两条平行线与过中点 $G$ 的直线相交构成中心对称型全等三角形的方法，就

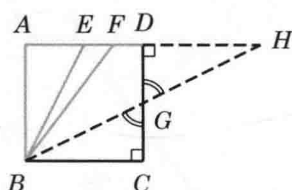


图 2-2-40

可以找到这对全等三角形应是$\triangle BGC$和$\triangle HGD$(图 2-2-40).

在这两个三角形中,对应角相等的性质都已成立,于是还须证明一组对应边相等.因为$BC$是正方形的边,所以就应证明$BC=HD$,也就是要证明$HD$也等于正方形的边长.

由条件$DF=\frac{1}{4}AD$,从而应证$FH=\frac{5}{4}AD$.由于已经证明$FH=FB$,所以问题就成为应证$FB=\frac{5}{4}AD$,因此$AF=\frac{3}{4}AD$,$AB=AD$,$\angle BAF=90°$,所以在直角三角形$BAF$中,应用勾股定理就可以证明$FB=\frac{5}{4}AD$,分析得以完成.

从上述分析可以看出,几何问题的辅助线是随着分析过程的进行,一步一步分析,一步一步添加出来的,每一条辅助线的添加都是有道理的.而且我们可以发现这条辅助线$BH$,它是一条线,但我们的分析是分两次完成的.第一次是根据角的倍半关系的定义作$\angle CBF$的平分线$BG$交$CD$于$G$,假如这时就将$BG$作到与$AD$的延长线相交,那么就讲不清楚为什么要延长的道理;而第二次是根据角平分线与平行线的组合得到等腰三角形,而且是这条平行线要和角平分线相交组成等腰三角形,现在它们还没有相交,所以要延长到相交,这样就将道理讲清楚了.所以几何问题的辅助线要随着分析过程的进行,分析到哪里添到哪里,既不能少,也不能多.

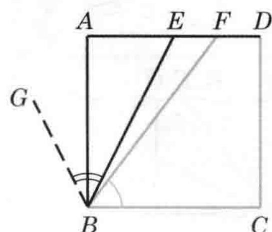


图 2-2-41

(2) 若选作半角$\angle ABE$的2倍,也就是作$\angle ABG=\angle ABE$(图 2-2-41)后,应证$\angle EBG$和$\angle CBF$相等.

由于在作出$\angle ABG=\angle ABE$,也就是$BA$是$\angle EBG$的平分线后,已知$EA\perp AB$,就出现了$EA$是向角平分线$BA$所作的垂线,所以一定得到一个等腰三角形中重要线段的基本图形,这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的,现在$EA$尚未与角的一边$BG$相交,所以应将它们延长到相交,也就是延长$EA$交$BG$于$G$(图 2-2-42),就可得

$\triangle ABG \cong \triangle ABE$，所以 $BG=BE$，$\angle BGE=\angle BEG$.

现在的问题是要证明$\angle EBG=\angle CBF$，由条件 $FD /\!/ BC$，这两条平行线可以看作是被 $BF$ 所截，$\angle CBF$ 和$\angle BFD$ 是一组同旁内角，所以可应用与同旁内角有关的平行线的基本图形的性质进行证明，$\angle CBF+\angle BFD=180°$（图 2-2-43）.由于在$\triangle BEG$ 中，$\angle EBG+\angle BGE+\angle BEG=180°$，$\angle EBG+2\angle BGE=180°$，从而问题又转化为要证$\angle BFD=2\angle BGE$.这又是两个角之间的倍半关系，所以可根据角的倍半关系的定义，将倍角$\angle BFD$ 两等分，也就是作$\angle BFD$ 的平分线 $FH$ 交 $BC$ 的延长线于 $H$（图 2-2-44），问题就转化为证$\angle DFH=\angle BGE$.而这两个角可以看作是 $FH$、$GB$ 被 $GD$ 所截得到的同位角，所以可应用与同位角有关的平行线的基本图形的性质进行证明，问题转化为证 $GB /\!/ FH$.已知 $GF /\!/ BH$，所以四边形 $GBHF$ 应是平行四边形，从而就要证明 $GF$ 和 $BH$ 不但平行，而且相等.因为 $GF=AG+AE+EF=2AE+EF=\frac{5}{4}AD$，于是就要证 $BH$ 也等于 $\frac{5}{4}AD$.

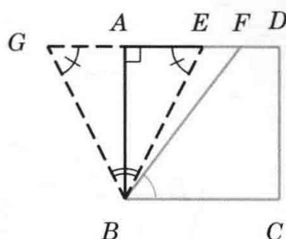


图 2-2-42

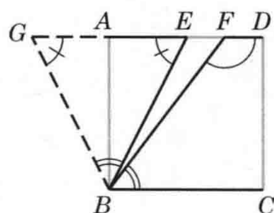


图 2-2-43

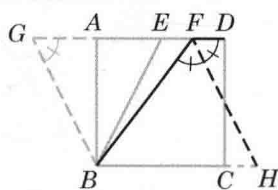


图 2-2-44

由$\angle DFH=\angle BFH$ 和 $FD /\!/ BH$，就出现了角平分线与平行线的组合关系，所以一定得到一个等腰三角形的基本图形.由于 $BH$ 是角的一边 $FD$ 的平行线，所以它应和角的另一边 $FB$ 以及角平分线 $FH$ 相交组成等腰三角形（图 2-2-45），所以由$\angle DFH=\angle BFH$，$\angle DFH=\angle BHF$，就可推得$\angle BHF=$

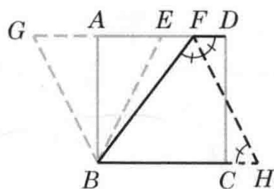


图 2-2-45

$\angle BFH$，$BH=BF$，所以问题转化为应证 $BF=\frac{5}{4}AD$.

在$\triangle BFA$ 中，由 $AB=AD$，$\angle BAF=90°$，$AF=\frac{3}{4}AD$，就可利用勾股定理得 $BF=\frac{5}{4}AD$，分析得以完成.

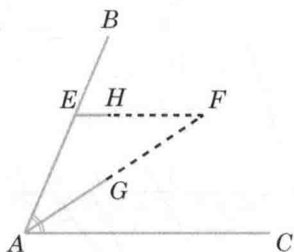


图 2-2-46

本题应用的添线方法也是一种比较重要、应用较多的添线方法，也就是角平分线与平行线的组合，一定得到一个等腰三角形的基本图形.由于出现的是角的一边的平行线，因此就应和角的另一边以及角平分线相交，得到等腰三角形.现在这条平行线尚未和角平分线相交，所以就应将它们延长到相交（图 2-2-46）.

如果需要集中进行这种添线方法的教学，那么可以在《几何王》软件的“智能搜索”功能中，选择左边栏筛选条件中的“基本图形”，鼠标依次悬停在“等腰三角形”→“等腰三角形二级子目录”，最后点击“等腰三角形三(2)”图标，就可以将所有应用这种添线方法的习题全部搜索出来.

### 三、等腰三角形中的重要线段

等腰三角形部分的第三个基本图形就是等腰三角形中的重要线段.

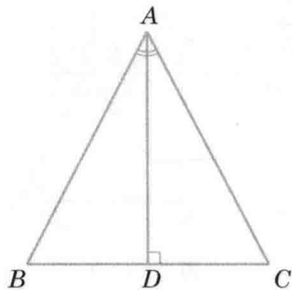


图 2-2-47

在等腰三角形中的重要线段这个基本图形中，出现了四个独立的性质：$AB=AC$，$AD\perp BC$（垂足为 $D$），$BD=CD$，$\angle BAD=\angle CAD$（图 2-2-47），若取其中的一个作为条件，则都推不出其他任何一个性质，但任取其中的两个作为条件，必定可以推得另外两个性质.我们称这四个性质具有两两等价性.

在上述四个独立的性质中，取其中的两个作为条件，另外两个作为结论，一共可以组成六个命题.只有当这六个命题都是真命题时，这四个性质才具有两两等价性.

1. $AB = AC, AD \perp BC \Rightarrow BD = CD, \angle BAD = \angle CAD$

这时出现的是等腰三角形底边上的高，基本图形是完整的，不需要添加辅助线.

2. $AB = AC, BD = CD \Rightarrow AD \perp BC, \angle BAD = \angle CAD$

这时出现的是等腰三角形底边的中点，还没有出现这条等腰三角形中的重要线段，所以应用的方法是将这条等腰三角形中的重要线段添上，也就是联结 $AD$(图 2-2-48).

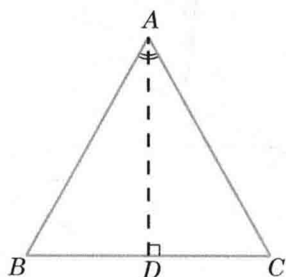


图 2-2-48

3. $AB=AC, \angle BAD=\angle CAD \Rightarrow AD \perp BC, BD=CD$

这时延长 $AD$ 交 $BC$ 于 $E$(图 2-2-49)，$AE$ 就是$\angle ABC$ 的平分线.

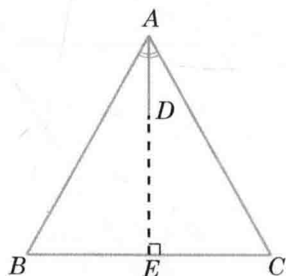


图 2-2-49

4. $AD \perp BC, BD = CD \Rightarrow AB = AC, \angle BAD = \angle CAD$

这时出现的是一边上的高和中线重合，但这时只出现了等腰三角形的底边，没有出现两条腰，所以应将两条腰添上，也就是联结 $AB$、$AC$(图 2-2-50).

5. $\angle BAD=\angle CAD, AD \perp BD \Rightarrow AB=AE, BD=ED$

这时出现的是一边上的高和角平分线重合，也可以表达成角平分线和向角平分线所作的垂线，从而一定构成等腰三角形中重要线段的基本图形，这个等腰

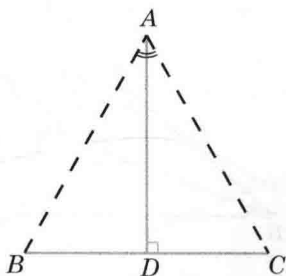


图 2-2-50

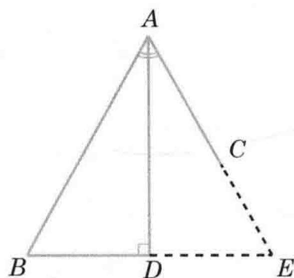


图 2-2-51

三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，所以当这条角平分线的垂线和角的两边还没有相交的时候，就应将它们延长到相交(图 2-2-51).

6. $\angle BAD=\angle CAD, BD=CD\Rightarrow AB=AC, AD\perp BC$

这时出现的是一边上的中线和角平分线重合，基本图形也是完整的，不需要添加辅助线.

等腰三角形中重要线段的基本图形的应用一共有以上六种情况，这是一种完全的、没有遗漏的列举.当我们将这六种情况都研究、讨论完以后，有关等腰三角形中的重要线段的基本图形的应用问题也就从根本上得到了解决.在讨论中我们也可以发现，在这六种情况中，需要添加辅助线的有四种情况，而教学中比较困难的就是角平分线和向角平分线作垂线这种情况，所以接下来就着重讨论这种情况.

【例 8】已知：$\triangle ABC$ 中，$BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，$CE$ 是 $\angle ACB$ 的平分线，$AF\perp CE$，垂足是 $F$，$AG\perp BD$，垂足是 $G$，联结 $FG$.(图 2-2-52)

求证：$FG/\!/BC$.

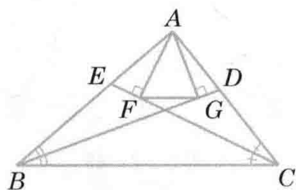


图 2-2-52

分析：本题条件中出现了两条角平分线和两条角平分线的垂线，它们就构成了角平分线和向角平分线所作的垂线之间的组合关系，也就必定得到一个等腰三角形中重要线段的基本图形.

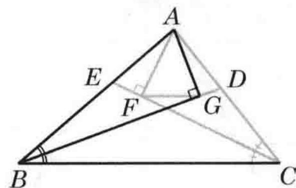


图 2-2-53

如果选取 $BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，$AG$ 是向角平分线 $BD$ 所作的垂线(图 2-2-53)，那么这个等腰三角形应是由角平分线 $BD$ 的垂线 $AG$ 和角的两边 $BA$、$BC$ 相交得到的.而现在 $AG$ 尚未和角的一边 $BC$

相交，所以应将角平分线的垂线段 $AG$ 延长到与角的一边 $BC$ 相交，也就是延长 $AG$ 交 $BC$ 于 $H$（图 2-2-54），就可得 $\triangle ABG \cong \triangle HBG$，$BA=BH$ 和 $AG=HG$.

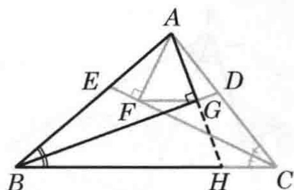


图 2-2-54

根据同样的道理，延长 $AF$ 交 $BC$ 于 $I$ 后，可得 $CA=CI$，$AF=IF$（图 2-2-55）.

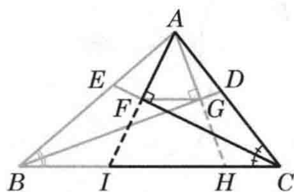


图 2-2-55

现在就出现了两个中点 $G$、$F$，是多个中点问题，就可以应用三角形中位线的基本图形进行证明.由于这两个中点 $F$、$G$ 所在的线段 $AI$、$AH$ 有公共端点 $A$，可以组成 $\triangle AIH$，因此 $FG$ 这两个中点的连线就是三角形的中位线（图 2-2-56），从而得到 $FG \parallel IH$，也即 $FG \parallel BC$.

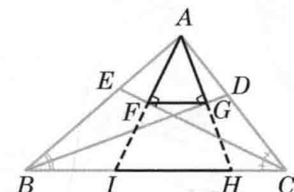


图 2-2-56

【例 9】 已知：$\triangle ABC$ 中，$AD$ 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的平分线，$AD=AB$，过 $C$ 作 $CE \perp AD$，交 $AD$ 的延长线于 $E$.（图 2-2-57）

求证：$AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

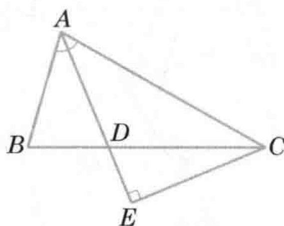


图 2-2-57

分析：由条件 $AD$ 是三角形的角平分线和 $CE \perp AD$，即 $CE$ 是向角平分线 $AD$ 所作的垂线，就构成了角平分线和向角平分线所作垂线的组合关系，从而一定得到等腰三角形中重要线段的基本图形.由于这个等腰三角形是由角平分线 $AD$ 的垂线 $CE$ 与角的两边 $AB$、$AC$ 相交得到的，而现在 $CE$ 尚未与角的一边 $AB$ 相交（图 2-2-58），所以应将它们延长到相交，也就是延长 $CE$ 与 $AB$ 的延长线相交于 $F$，可得 $\triangle AEF \cong \triangle AEC$，$AF=AC$，$EF=EC$（图 2-2-59）.

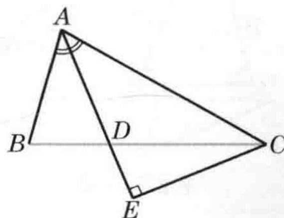


图 2-2-58

这样要证明的结论就转化为 $AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$

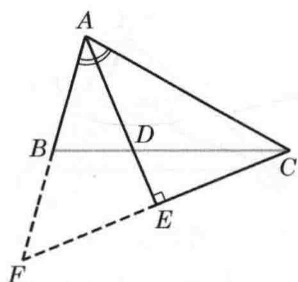


图 2-2-59

$=\frac{1}{2}(AB+AF)=AB+\frac{1}{2}BF$，即 $DE=\frac{1}{2}BF$.

(1) 这是两条线段之间的倍半关系，从而可根据线段倍半关系的定义，先将 $\frac{1}{2}BF$ 作出，于是取 $BF$ 的中点 $G$，得 $BG=\frac{1}{2}BF$（图 2-2-60）.

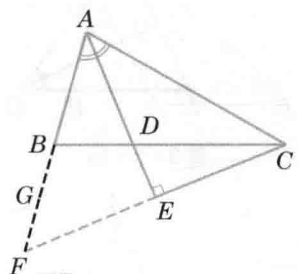


图 2-2-60

从而要证的结论又进一步转化为 $AE=AB+BG=AG$.

这样就出现了 $AE$、$AG$ 是两条具有公共端点 $A$ 的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形（图 2-2-61），问题也就转化为一个等腰三角形的判定问题.但现在这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，所以应将底边添上，也就是联结 $GE$（图 2-2-62），然后应证 $AE=AG$ 的等价性质 $\angle AGE=\angle AEG$.

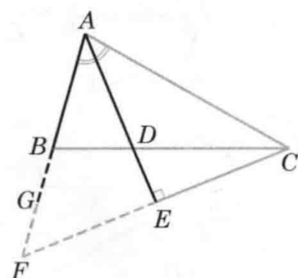


图 2-2-61

由条件 $AD=AB$，$\triangle ABD$ 是等腰三角形，且这两个等腰三角形有公共的顶角 $\angle GAE$，可知要证明 $\angle AGE=\angle AEG$，只要证 $\angle AGE=\angle ABD$，而这两个角是 $BD$、$GE$ 被 $AG$ 所截得到的同位角，所以可应用与同位角有关的平行线的基本图形的性质进行证明，也就是证 $BD/\!/GE$.

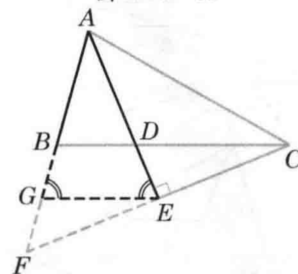


图 2-2-62

由于 $E$ 是 $CF$ 的中点，而 $G$ 是 $BF$ 的中点，出现了两个中点，是多个中点问题，从而就要应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明.由于 $G$、$E$ 这两个中点所在的线段 $FB$、$FC$ 具有公共端点 $F$，可以组成三角形，因此 $GE$ 这两个中点的连线就是三角形的一条中位线（图 2-2-63），那么，应用三角形的中位线的性质就可以证明 $BD/\!/GE$，分析得以完成.

(2) 如果根据线段的倍半关系的定义来进行分

析，选取的是作半线段的两倍，也就是延长 $DE$ 到 $G$，使 $EG=ED$，那么就应证 $BF=DG$（图 2-2-64）.

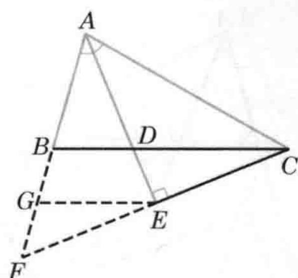


图 2-2-63

而在作出 $EG=DE$ 后，由于已经证明 $FE=CE$，且 $FC$、$DG$ 相交于 $E$，这样就出现了两组相等线段位于一组对顶角的两边且成一直线，因此可应用中心对称型全等三角形进行证明.

应用的方法是将四个端点两两连起来组成中心对称型全等三角形，也就是联结 $FG$，即可得 $\triangle DCE \cong \triangle GFE$（图 2-2-65），$\angle DCE=\angle GFE$，而这两个角是 $DC$、$FG$ 被 $CF$ 所截得到的内错角，于是可应用与内错角有关的平行线的基本图形的性质进行证明，也就可得 $DC /\!/ FG$，即 $BD /\!/ FG$.

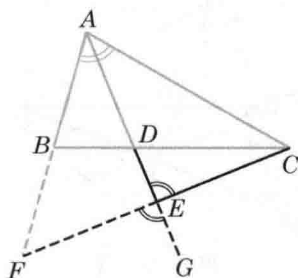


图 2-2-64

这样又出现了 $BD$ 是 $\triangle AFG$ 内一条边 $FG$ 的平行线段，于是可应用由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形进行证明. 由条件 $AB=AD$，可证得 $BF=DG$.

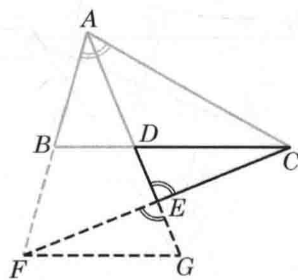


图 2-2-65

（3）本题在转化为证 $DE=\frac{1}{2}BF$ 后，由于已经证明 $E$ 是 $CF$ 的中点，这个线段之间的倍半关系就和线段的中点发生联系，因此可应用三角形中位线的基本图形进行证明，应用的方法就出现了两种可能：将倍线段 $BF$ 取作三角形的边和将半线段 $DE$ 取作三角形的中位线.

① 若选取将倍线段 $BF$ 取作 $\triangle CBF$ 的边，则图形中出现了有三角形而没有中位线，所以应将三角形的中位线添上. 于是取 $BC$ 的中点 $G$，联结 $EG$，就可得 $EG /\!/ BF$，$GE=\frac{1}{2}BF$（图 2-2-66）.

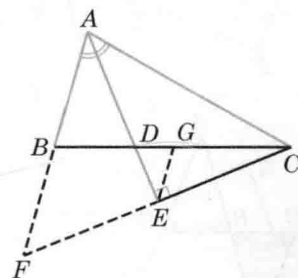


图 2-2-66

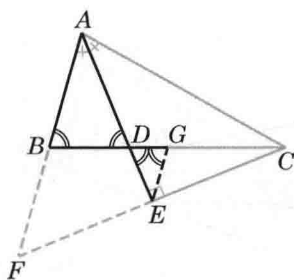


图 2-2-67

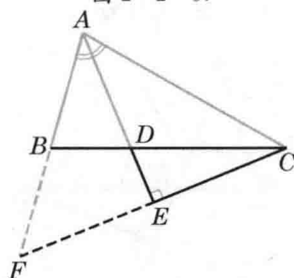


图 2-2-68

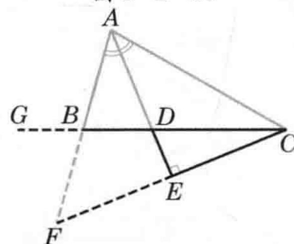


图 2-2-69

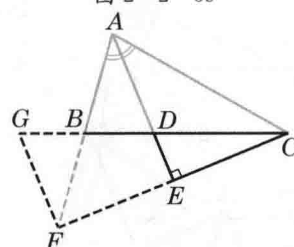


图 2-2-70

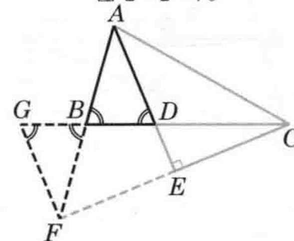


图 2-2-71

这样问题就成为证 $EG=ED$.这是两条具有公共端点 $E$ 的相等线段,它们可以组成一个等腰三角形,问题也就成为一个等腰三角形的判定问题,也就是要证 $EG=ED$ 的等价性质$\angle EGD=\angle EDG$(图 2-2-67).而由 $EG /\!/ BA$,可得$\angle EGD=\angle ABD$,由 $BC$、$AE$ 相交于$D$,可得$\angle EDG=\angle ADB$,由条件 $AB=AD$,即得$\angle ABD=\angle ADB$,分析得以完成.

② 若选取将半线段 $DE$ 取作三角形的中位线,则图形中有三角形的中位线而三角形不完整,应将三角形的边添上(图 2-2-68).这时要使 $DE$ 成为三角形的中位线,必须要使 $D$、$E$ 成为中点,而现在图形中的点 $D$ 还不是中点,于是延长 $CB$ 到$G$,使 $DG=DC$(图 2-2-69),这样 $D$、$E$ 就分别成为具有公共端点 $C$ 的线段 $CG$、$CF$ 的中点,所以 $DE$ 就是$\triangle CGF$ 的一条中位线.于是联结 $GF$,就可得 $DE /\!/ GF$,$DE=\frac{1}{2}GF$(图 2-2-70),问题就转化为要证 $BF=GF$.

这是两条具有公共端点 $F$ 的相等线段,它们就可以组成一个等腰三角形,问题也就成为一个等腰三角形的判定问题,也就是要证 $BF=GF$ 的等价性质$\angle FBG=\angle FGB$(图 2-2-71).由于已证 $DE /\!/ GF$,因此 $AD /\!/ GF$,且已知 $AB=AD$,$\angle ADB=\angle ABD$,所以 $BF=GF$ 就可以证明,分析也就得以完成.

【例 10】已知:$\triangle ABC$ 中,$BC=3AB$,$BD$ 是三角形中$\angle ABC$ 的平分线,过 $C$ 作 $CE\perp BD$ 交 $BD$ 的延长线于 $E$.(图 2-2-72)

求证:$BD=ED$.

分析:本题的条件中出现了 $BD$ 是三角形中

$\angle ABC$ 的平分线，$CE \perp BD$，即 $CE$ 是向角平分线 $BD$ 所作的垂线段，所以必定得到一个等腰三角形中重要线段的基本图形(图 2-2-73).

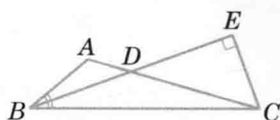


图 2-2-72

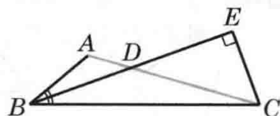


图 2-2-73

由于这个等腰三角形是由角平分线 $BD$ 的垂线段 $CE$ 和角的两边 $BC$、$BA$ 相交得到的，而现在 $CE$ 尚未和角的一边 $BA$ 相交，因此应将它们延长到相交，也就是延长 $CE$ 交 $BA$ 的延长线于 $F$(图 2-2-74)，就可得$\triangle BEF \cong \triangle BEC$，$BF=BC$，$EF=EC$，并进一步可得 $BF=3AB$，$AF=2AB$.

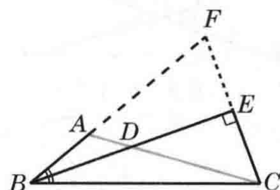


图 2-2-74

(1) 由于 $AF=2AB$ 是线段之间的倍半关系，所以可根据线段倍半关系的定义将倍线段 $AF$ 两等分，也就是取 $AF$ 的中点 $G$，可得 $AB=AG=GF$(图 2-2-75).

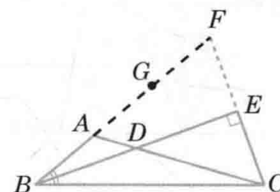


图 2-2-75

在作出了 $G$ 是 $AF$ 的中点后，由于已经证明 $E$ 是 $CF$ 的中点(图 2-2-76)，出现了两个中点，是多个中点问题，因此就可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明.

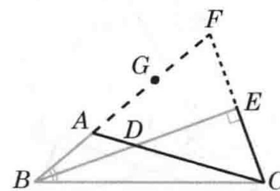


图 2-2-76

由于 $G$、$E$ 这两个中点所在的线段 $AF$、$CF$ 具有公共端点 $F$，可以组成三角形，所以 $G$、$E$ 这两个中点的连线就是三角形的中位线，而现在图形中是有三角形而没有中位线，所以应将中位线添上，也就是联结 $EG$(图 2-2-77)，即可得 $GE \parallel AC$.在$\triangle BEG$ 中，由 $BA=GA$，$AD \parallel GE$，并应用三角形中位线的基本图形的性质，就可推得 $BD=ED$(图 2-2-78).

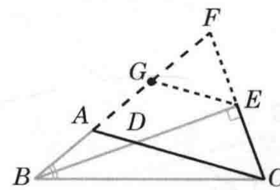


图 2-2-77

(2) 由于问题是要证明 $BD=ED$，而已知 $BE$、$AC$ 相交于 $D$，即 $BD$ 和 $ED$ 这两条要证明相等的线段是位于一组对顶角的两边且成一直线，从而就可添

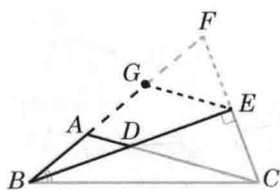


图 2-2-78

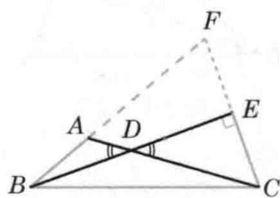


图 2-2-79

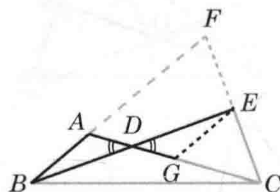


图 2-2-80

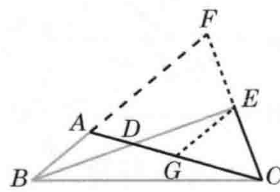


图 2-2-81

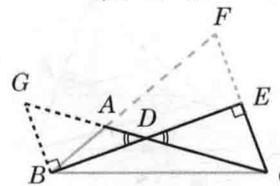


图 2-2-82

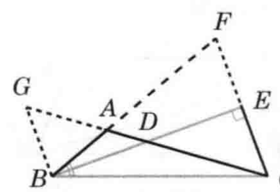


图 2-2-83

加中心对称型全等三角形进行证明(图 2-2-79),添加的方法是过线段的端点作平行线.

① 若选取过端点 $E$ 作平行线,即过 $E$ 作 $EG/\!/AB$ 交 $AC$ 于 $G$,问题就转化为证$\triangle BAD\cong\triangle EGD$(图 2-2-80).

由$\angle ADB=\angle GDE$ 和$\angle ABD=\angle GED$,所以还要证明一组边对应相等.由于已经证明 $FE=CE$,且 $EG/\!/FA$,所以在$\triangle CFA$ 中,应用三角形中位线的基本图形的性质,可证明 $AF=2EG$(图 2-2-81),又因为已证明 $AF=2AB$,从而可得 $AB=EG$,分析得以完成.

② 若平行线选取过端点 $B$ 作,则过 $B$ 作 $BG/\!/CE$ 交 $CA$ 的延长线于 $G$(图 2-2-82),问题就转化为证$\triangle BDG\cong\triangle EDC$.

可知$\angle BDG=\angle EDC$ 和$\angle DBG=\angle DEC$,还应证一组边对应相等.

由 $BG/\!/CF$,且这两条平行线段的四个端点两两的连线在点 $A$ 相交,所以可应用由三角形外一条边的平行线得到的平行线型相似三角形进行证明,于是可得$\triangle BAG\backsim\triangle FAC$(图 2-2-83),$\dfrac{BG}{FC}=\dfrac{AB}{AF}$,由于已经证明 $AF=2AB$,所以 $FC=2BG$,而已经证明 $FC=2EC$,就可得 $BG=EC$,所以$\triangle BDG\cong\triangle EDC$ 就得以证明.

本题在应用中心对称型全等三角形进行证明时,添加的方法都是过两个端点作平行线,将这两条平行线作到与过中点的直线相交,就一定得到中心对称型全等三角形的基本图形.若不相交,就是过端点 $E$ 或

$B$ 作 $AC$ 的平行线，这时中心对称型全等三角形就消失了，而得到的就是三角形中位线的基本图形，其中过 $E$ 作 $AC$ 的平行线的情况已经进行了讨论，所以可讨论过 $B$ 作 $AC$ 的平行线的情况，也就是过 $B$ 作 $BG // AC$ 交 $EC$ 的延长线于 $G$，就可以得到 $DC$ 一定是 $\triangle EBG$ 的中位线，从而也可以完成分析.

【例 11】已知：$\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$，垂足是 $D$，$E$ 是 $AD$ 上一点，联结 $BE$、$CE$，延长 $BE$ 交 $AC$ 于 $F$，延长 $CE$ 交 $AB$ 于 $G$. 联结 $DG$、$DF$.（图 2-2-84）

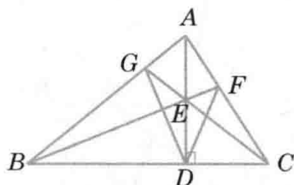


图 2-2-84

求证：$\angle ADG = \angle ADF$.

分析：本题要证 $\angle ADG = \angle ADF$，即 $AD$ 是 $\angle FDG$ 的角平分线，而条件中给出了 $AD$ 是高，也就是 $BC$ 是角平分线 $AD$ 的垂线，从而就可得到一个等腰三角形中重要线段的基本图形（图 2-2-85）.

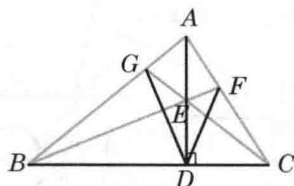


图 2-2-85

这个等腰三角形应是由角平分线 $AD$ 的垂线和角的两边 $DG$、$DF$ 相交而得到，而现在的图形中，虽然角平分线 $AD$ 的垂线 $BC$ 是和 $\angle FDG$ 的两边相交，但却相交于角的顶点 $D$ 上，所以等腰三角形就退化成一个点，即等腰三角形消失.

这样要作出等腰三角形，就必须要使角平分线的垂线离开角的顶点，而要使这条垂线既离开顶点又要保持与角平分线垂直，就应将 $BC$ 平移. 而在将 $BC$ 平移的过程中，只要 $BC$ 一离开点 $D$ 就可以在与角的两边相交后出现等腰三角形，所以在这个平移过程中能够得到的等腰三角形显然就可以有无数多个，因此，问题就转化为要选择一个恰当的位置，也就是选择一个能够与条件发生联系的点，过该点作 $BC$ 的平行线. 由于 $AD$ 是条件中给出的已知三角形的高，而点

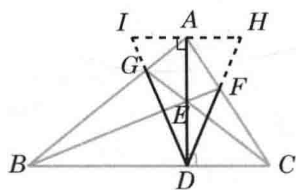


图 2-2-86

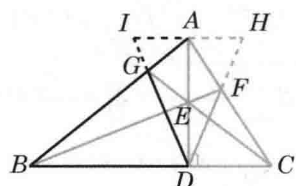


图 2-2-87

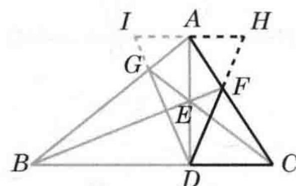


图 2-2-88

$D$ 是不能取的，所以就应选取过 $A$ 作 $BC$ 的平行线，也就是过 $A$ 作 $HI \parallel BC$ 交 $DF$、$DG$ 的延长线于 $H$、$I$（图 2-2-86），那么 $\triangle DHI$ 应是等腰三角形，而要证明 $\angle ADG = \angle ADF$，也就可以转化为证明 $AH = AI$.

而由 $IH \parallel BC$，可得 $AI$、$BD$ 是两条平行线段，且它们四个端点两两的连线在点 $G$ 相交，从而可应用由三角形外一条边的平行线所得到平行线型相似三角形进行证明.

由 $AI \parallel BD$，可得 $\triangle AGI \backsim \triangle BGD$（图 2-2-87），所以 $\frac{AG}{BG} = \frac{AI}{BD}$，$AI = \frac{AG \cdot BD}{BG}$.

根据同样的道理，由 $AH \parallel CD$，可得 $\triangle AHF \backsim \triangle CDF$（图 2-2-88），$\frac{FA}{CF} = \frac{AH}{CD}$，$AH = \frac{AF \cdot CD}{CF}$.这样要证明 $AH = AI$，就转化为要证明 $\frac{AG \cdot BD}{BG} = \frac{AF \cdot CD}{CF}$，也就是要证 $\frac{AG}{BG} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$.

由于 $\triangle ABC$ 中，过三顶点的 $AD$、$BF$、$CG$ 相交于一点 $E$，所以应用西瓦定理就可以完成证明.

如果不直接应用西瓦定理，那么由于这里出现的三组相比线段都重叠在一直线上，所以再应用添加平行线型相似三角形的基本图形也可以完成分析.

若需要集中进行这种添线方法的教学，可以在《几何王》软件的“智能搜索”功能中，选择左边栏筛选条件中的“基本图形”，鼠标依次悬停在“等腰三角形”→“等腰三角形中的重要线段”，最后点击“等腰三角

形五(6)”图标，就可以将所有应用这种添线方法的习题全部搜索出来.

## 四、直角三角形斜边上的中线

等腰三角形部分的第四个基本图形就是直角三角形斜边上的中线.

$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AD=BD \Leftrightarrow CD=AD=\frac{1}{2}AB$

$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AD=BD \Leftrightarrow \angle DAC=\angle DCA$，$\angle BDC=2\angle DAC$(图 2-2-89)

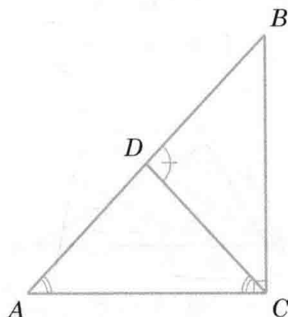


图 2-2-89

直角三角形斜边上的中线，本质上是两个顶角互补的等腰三角形的组合图形.

直角三角形斜边上的中线这一基本图形的应用有三种可能情况：出现了直角三角形斜边上的中线；出现了直角三角形斜边的中点；出现了两条线段之间的倍半关系，且其中的倍线段是一个直角三角形的斜边.应用的方法是在没有出现直角三角形斜边上的中线的情况下，将斜边上的中线添上.

【例 12】已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=2\angle ACB$，$AD\perp BC$，垂足是 $D$，$E$ 是 $BC$ 的中点.(图 2-2-90)

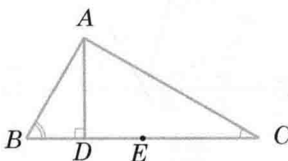


图 2-2-90

求证：$DE=\frac{1}{2}AB$.

分析：(1) 本题给出了条件 $AD\perp BC$，而要证明的结论 $DE=\frac{1}{2}AB$ 是两条线段之间的倍半关系，且其中的倍线段 $AB$ 是直角三角形 $ABD$ 的斜边，所以就可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明(图 2-2-91).现在图形中有直角三角

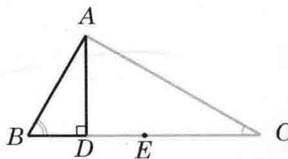


图 2-2-91

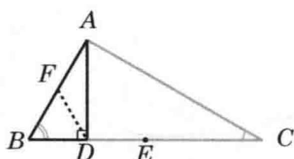


图 2-2-92

形，而没有斜边上的中线，于是要将斜边上的中线添上，也就是取 $AB$ 的中点 $F$，联结 $DF$，可得 $DF=\frac{1}{2}AB$（图 2-2-92），从而问题就转化为应证 $DF=DE$.

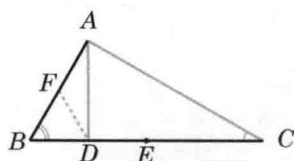


图 2-2-93

而由所作的 $F$ 是 $AB$ 的中点和条件 $E$ 是 $BC$ 的中点，出现了两个中点，是多个中点问题，从而可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明.由于中点 $E$、$F$ 所在线段 $BC$、$BA$ 有公共端点 $B$（图 2-2-93），可以组成三角形，因此 $E$、$F$ 这两个中点的连线就是三角形的一条中位线，但现在图形中有三角形而没有中位线，从而需将中位线添上，也就是联结 $EF$，可得 $EF\parallel CA$（图 2-2-94）.

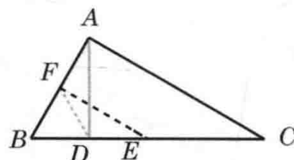


图 2-2-94

现在要证的是 $DF=DE$，而 $DE$、$DF$ 是两条具有公共端点 $D$ 的相等线段，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题（图 2-2-95）.又因为 $E$、$D$、$B$ 成一直线，图形中出现了这个要证明的等腰三角形的顶角的外角，所以要证明 $DE=DF$，就可以转化成要证它的等价性质$\angle FDB=2\angle FEB$.又因为由直角三角形斜边上中线的基本图形的性质，可得 $FD=FB$，$\angle FDB=\angle FBD$，而由条件$\angle ABC=2\angle ACB$，可将问题转化为证$\angle ACB=\angle FEB$，由于这两个角是 $FE$、$AC$ 被 $BC$ 所截得到的同位角，所以可应用与同位角有关的平行线的基本图形进行证明，又已证 $EF\parallel CA$，故分析得以完成.

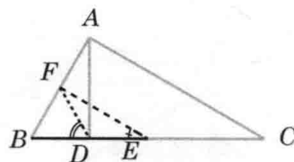


图 2-2-95

（2）由于本题要证的结论 $DE=\frac{1}{2}AB$ 是两条线段之间的倍半关系，且其中的半线段 $DE$ 的一个端点 $E$ 是 $BC$ 的中点，出现了线段之间的倍半关系是和线

段的中点发生联系的，可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明.应用的方法有两种可能：将倍线段取作三角形的边和将半线段取作三角形的中位线.

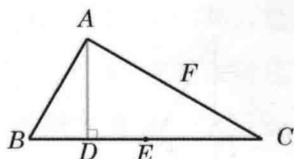


图 2-2-96

① 若将倍线段 $AB$ 取作三角形的边，则由 $E$ 是 $BC$ 的中点，可知应将 $AB$ 看作$\triangle ABC$ 的一条边，现在图形中就是有三角形而没有中位线，所以应将三角形的中位线添上，也就是取 $AC$ 的中点 $F$(图 2-2-96)，并联结 $EF$，从而可得 $EF \parallel BA$，$EF=\frac{1}{2}AB$，$\angle FEC=\angle ABC$(图 2-2-97).

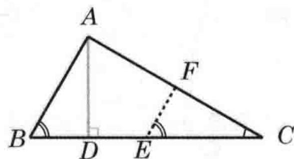


图 2-2-97

由条件 $\angle ABC=2\angle ACB$，可得 $\angle FEC=2\angle ACB$，而在作了 $AC$ 的中点 $F$ 后，由条件$\angle ADC=90°$，可知 $F$ 就成为直角三角形 $ACD$ 的斜边的中点，这样又可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明.

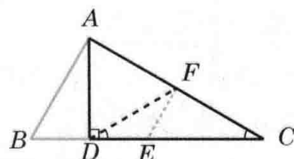


图 2-2-98

由于现在图形中是有直角三角形，而没有斜边上的中线，因此应将斜边上的中线添上，于是联结 $FD$(图 2-2-98)，从而可得 $FD=FC=\frac{1}{2}AC$，$\angle FCD=\angle FDC$，$\angle FEC=2\angle FDC$.而已知 $D$、$E$、$C$ 成一直线，$\angle FEC$ 是$\triangle EFD$ 的一个外角，从而可证明 $DE=EF$(图 2-2-99)，而 $EF=\frac{1}{2}AB$，所以 $DE=\frac{1}{2}AB$ 得以证明.

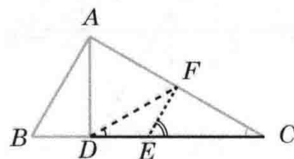


图 2-2-99

② 若选取半线段 $DE$ 为三角形的中位线，则首先应使 $DE$ 的两个端点 $D$ 和 $E$ 都成为线段的中点.若考虑点 $D$，则延长 $AD$ 到 $F$，使 $DF=AD$(图 2-2-100)，接下来就应考虑点 $E$，尽管条件中已给出 $E$ 是 $BC$ 的中点，但由于 $E$ 所在线段 $BC$ 和 $D$ 所在的线段

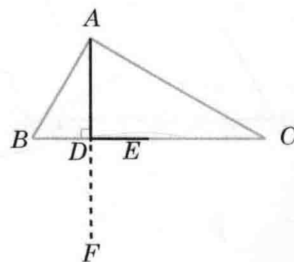


图 2-2-100

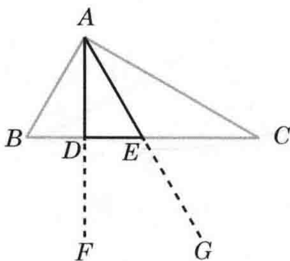


图 2-2-101

$AF$ 没有公共的端点，不能组成三角形，所以这两个中点的连线就不是三角形的中位线，由于 $E$ 所在的线段必须要与 $D$ 所在的线段 $AF$ 有公共的端点，所以这个公共端点只能是取点 $A$ 或者取点 $F$.

若选取公共端点为 $A$，则联结 $AE$ 并延长 $AE$ 到 $G$，使 $GE=AE$（图 2-2-101），这样 $D$、$E$ 这两个中点的连线就成为三角形的中位线，而现在图形中出现了有中位线而三角形不完整，于是应将三角形的边添上，也就是联结 $FG$（图 2-2-102），就可得 $DE\parallel FG$，且 $DE=\frac{1}{2}FG$，这样问题就转化为证 $AB=FG$.

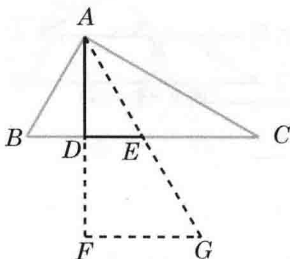


图 2-2-102

又因为作 $AE=GE$ 后，由条件给出的 $BE=CE$，且 $BC$、$AG$ 在点 $E$ 相交，从而出现了两组相等线段都分别位于一组对顶角 $\angle AEB$ 和 $\angle GEC$ 的两边且成一直线，所以可添加一对中心对称型全等三角形进行证明（图 2-2-103），由于现在出现的是两组相交的相等线段，因此添加的方法是将这四个端点两两联结起来，于是联结 $GC$（图 2-2-104），可得 $\triangle AEB\cong\triangle GEC$，$AB=GC$，且可得 $\angle ABC=\angle GCB$，而已知 $\angle ABC=2\angle ACB$，所以 $\angle GCB=2\angle ACB$.

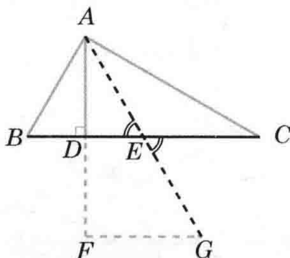


图 2-2-103

这样问题进一步转化成要证 $FG=GC$，这是两条具有公共端点 $G$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形（图 2-2-105），但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，所以应将底边添上，也就是联结 $FC$，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，即要证明 $FG=CG$，就可以转化成证它的等价性质 $\angle GCF=\angle GFC$，又因为已经证明 $DC\parallel FG$，这样就出现了一

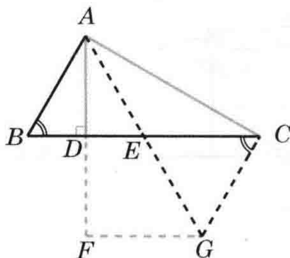


图 2-2-104

次等腰三角形和平行线的组合关系，所以一定得到角平分线(图 2-2-106)，也就是由 $DC$、$FG$ 这一组平行线被 $FC$ 所截，可得 $\angle GFC=\angle BCF$，问题就转化为要证 $\angle BCF=\angle GCF$，$FC$ 是 $\angle GCB$ 的角平分线，也就是要证 $\angle GCB=2\angle BCF$，但我们已证得 $\angle GCB=2\angle ACB$，所以问题又转化为要证 $\angle BCF=\angle BCA$.由条件 $AD\perp BC$ 和所作的 $AD=FD$，可得 $CB$ 是 $AF$ 的垂直平分线，所以应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质就可以证明 $CA=CF$ 和 $\angle BCF=\angle BCA$(图 2-2-107)，分析就得以完成.

若选取的公共端点为点 $F$，则联结 $FE$ 并延长 $FE$ 到 $G$，使 $GE=FE$(图 2-2-108)，那么 $DE$ 就是 $\triangle FGA$ 的中位线，所以联结 $AG$(图 2-2-109)，可得 $DE\parallel AG$，$DE=\frac{1}{2}AG$，这样问题就转化为要证 $AB=AG$.

这是两条具有公共端点 $A$ 的相等线段，它们可以组成等腰三角形，所以联结 $BG$(图 2-2-110)，就成为一个等腰三角形的判定问题，也就是问题转化为应证 $AB=AG$ 的等价性质 $\angle ABG=\angle AGB$，而由 $AG\parallel BC$，且可以看作是被 $BG$

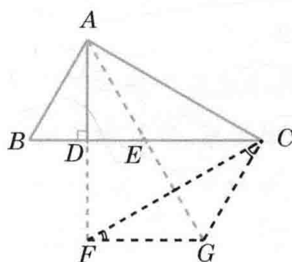


图 2-2-105

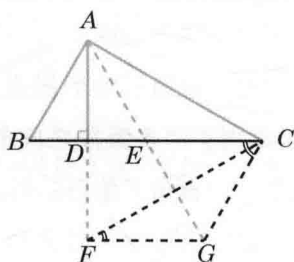


图 2-2-106

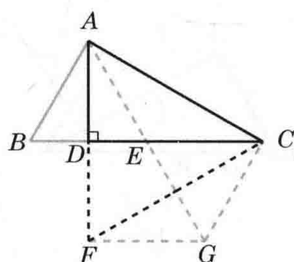


图 2-2-107

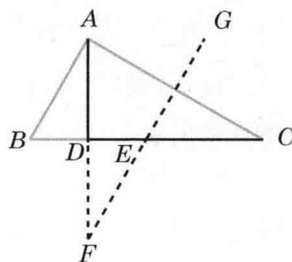


图 2-2-108

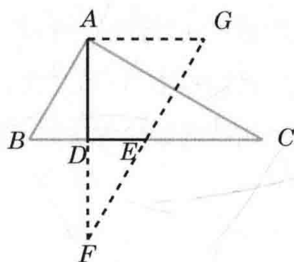


图 2-2-109

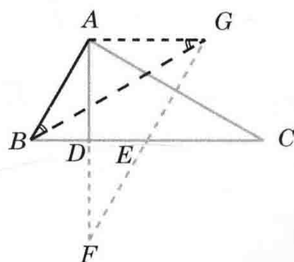


图 2-2-110

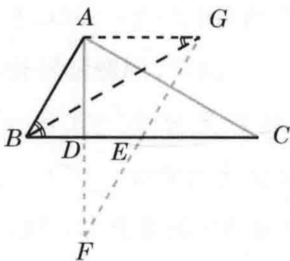


图 2-2-111

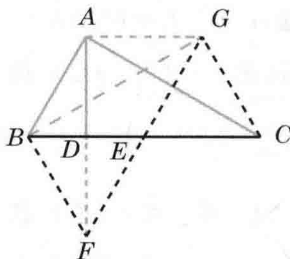


图 2-2-112

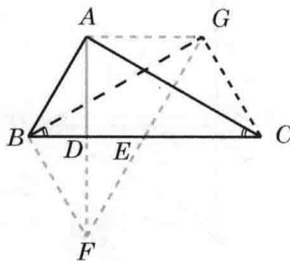


图 2-2-113

所截，所以$\angle AGB=\angle CBG$，从而又应证$\angle ABG=\angle GBC$，$BG$是$\angle ABC$的平分线，$\angle ABC=2\angle GBC$（图 2-2-111），由条件$\angle ABC=2\angle ACB$，从而问题又转化为要证$\angle GBC=\angle ACB$.

又因为$EB=CE$，$FE=GE$，这两组相等线段也是位于一组对顶角$\angle BEF$和$\angle CEG$的两边，且成一直线，所以也可添加一对中心对称型全等三角形进行证明，添加的方法是将四个端点两两联结起来，也就是联结$BF$、$GC$（图 2-2-112），就可推得$\triangle BEF\cong\triangle CEG$，$BF=CG$.又因为$BC$是$AF$的垂直平分线，应用线段垂直平分线的性质又可得$BA=BF$，所以$AB=GC$，四边形$ABCG$是一个等腰梯形.在等腰梯形内，应用图形的轴对称性质，或者通过一对轴对称型的全等三角形，即$\triangle ACB\cong\triangle GBC$（图 2-2-113），就可以证明上述性质，从而完成分析.

对于直角三角形斜边上的中线这个基本图形来说，出现了两条线段之间的倍半关系，且其中的倍线段是一个直角三角形的斜边这种情况时的添线方法，是有必要进行专题教学的.如果需要集中进行这种添线方法的教学，就可以在《几何王》软件的“智能搜索”功能中，选择左边栏筛选条件中的“基本图形”，鼠标依次悬停在“等腰三角形”→“直角三角形斜边上的中线”，最后点击“直角三角形一(3)”图标，就可以将所有应用这种添线方法的习题全部搜索出来.

# 第三节　全等三角形

## 一、轴对称型

$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$D$ 是 $AB$ 上的一点，$E$ 是 $AC$ 上的一点，$AD=AE \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle ACD$，$\triangle BCE \cong \triangle CBD$（图 2-3-1）

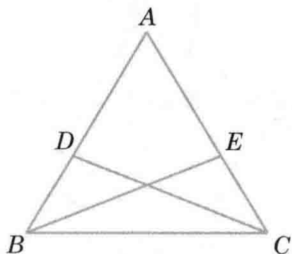


图 2-3-1

轴对称型全等三角形应用的第一种情况是：当两条相等的线段或两个相等的角位于一个等腰三角形（或轴对称图形）的轴对称部分时，就可以应用轴对称型全等三角形进行证明，根据图形的轴对称部分就能找到全等三角形.

四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC$（图 2-3-2）

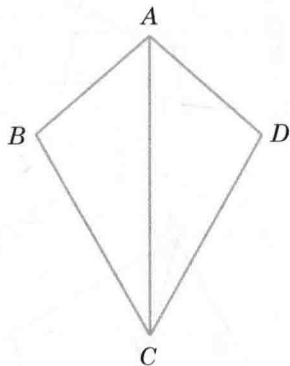


图 2-3-2

轴对称型全等三角形应用的第二种情况是：当两条相等的线段或两个相等的角关于某一条直线成轴对称时，就可以应用或添加轴对称型全等三角形进行证明.添加的方法是：在没有对称轴时添加对称轴（图 2-3-3）.

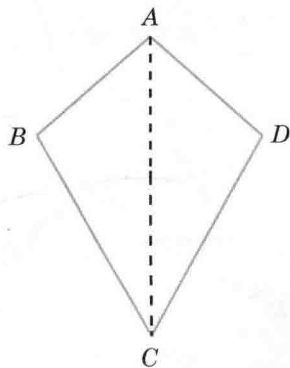


图 2-3-3

轴对称型全等三角形应用的第三种情况是：当两条相等的线段或两个相等的角关于某一条直线成轴对称时，就可以应用或添加轴对称型全等三角形进行证明.添加的方法是：将三角形沿对称轴翻折过去（图 2-3-4）.

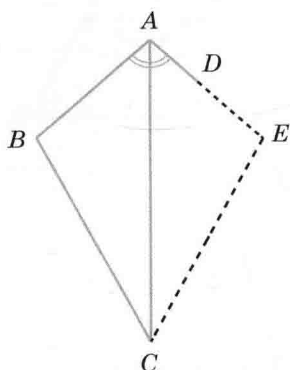


图 2-3-4

【例 1】已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=2\angle ACB$，$AD$ 是三角形中 $\angle BAC$ 的平分线.(图 2-3-5)

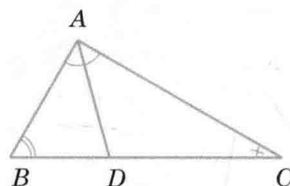


图 2-3-5

求证：$AC=AB+BD$.

分析：本题要证明 $AC=AB+BD$，这是一条线段等于两条线段的和，所以可根据线段和差关系的定义来开始进行分析.

(1) 若根据线段和的定义来分析，则可将 $AB$ 和 $BD$ 接起来，这时就会出现两种可能，即将 $BD$ 接到 $AB$ 上或将 $AB$ 接到 $BD$ 上.

① 如果将 $BD$ 接到 $AB$ 上，也就是延长 $AB$ 到 $E$，使 $BE=BD$(图 2-3-6)，那么 $AE$ 就等于 $AB+BD$，问题就转化为证 $AE=AC$.

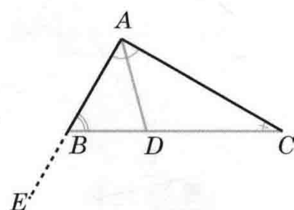


图 2-3-6

但在作出了 $BE=BD$ 后，由于这是两条具有公共端点 $B$ 的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形，现在这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，于是将底边 $ED$ 添上，即联结 $ED$(图 2-3-7)，又因为 $E$、$B$、$A$ 成一直线，出现了 $\angle ABD$ 是这个等腰三角形的顶角的外角，所以可得 $\angle ABD=2\angle BED$，而已知 $\angle ABD=2\angle ACB$，从而就有 $\angle BED=\angle ACB$.

而条件中已给出 $\angle EAD=\angle CAD$，就出现了这两个相等的角是关于 $AD$ 成轴对称的，从而就可应用轴对称型全等三角形进行证明.根据图形的轴对称部分，就可以找到这对全等三角形应是 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$(图 2-3-8)，在这两个三角形中，因为 $\angle EAD=\angle CAD$，$\angle AED=\angle ACD$，$AD=AD$，所以全等，$AE=AC$ 也就得以证明.

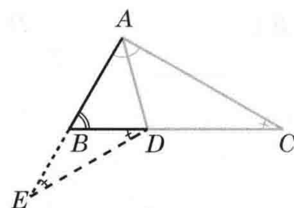


图 2-3-7

② 如果将 $AB$ 接到 $BD$ 上，也就是延长 $DB$ 到

$E$,使 $EB=BA$(图 2-3-9),那么就有 $ED=AB+BD$,问题也就成为要证 $AC=ED$.但在作出 $EB=BA$ 以后,就出现了这是两条具有公共端点 $B$ 的相等线段,于是它们可以组成一个等腰三角形,但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边,所以应将底边 $AE$ 添上,于是联结 $AE$(图 2-3-10).又因为 $E$、$B$、$C$ 成一直线,应用等腰三角形的基本图形的性质就有 $\angle ABC=2\angle AEC$,而已知 $\angle ABC=2\angle ACB$,所以 $\angle AEC=\angle ACE$.

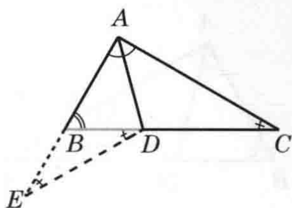


图 2-3-8

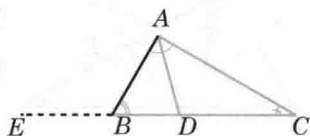


图 2-3-9

这两个角相等一旦出现,就得到 $\triangle AEC$ 也是等腰三角形(图 2-3-11),也就是 $AE=AC$,那么问题就转化为证 $ED=EA$.这又是两条具有公共端点 $E$ 的相等线段,它们又可以组成一个等腰三角形,问题也就转化为一个等腰三角形的判定问题,这样就应证 $ED=EA$ 的等价性质 $\angle EAD=\angle EDA$(图 2-3-12),而由 $E$、$D$、$C$ 成一直线,可知 $\angle EDA$ 是 $\triangle ADC$ 的一个外角,于是有 $\angle EDA=\angle ACD+\angle CAD$,而 $\angle DAE$ 又等于 $\angle EAB+\angle BAD$,且已知 $\angle CAD=\angle BAD$,所以问题就转化为证 $\angle BAE=\angle ACD$,而因这两个角都和 $\angle AEC$ 相等,分析即可完成.

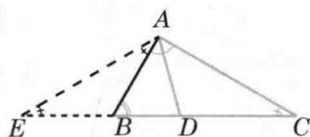


图 2-3-10

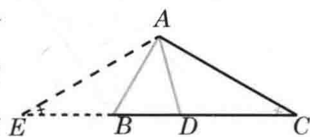


图 2-3-11

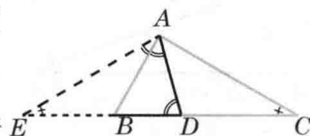


图 2-3-12

(2) 若在根据线段和差关系的定义来进行分析时,选取根据线段差的定义来进行分析,则可在线段 $AC$ 上截取 $AE=AB$,问题就转化为证 $EC=BD$(图 2-3-13).

而在作出了 $AE=AB$ 后,由 $AD$ 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的平分线,就出现了 $AE$ 和 $AB$ 这两条相等的线段关于 $AD$ 成轴对称,从而可添加轴对称型全等三

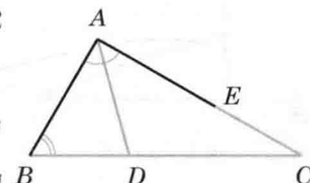


图 2-3-13

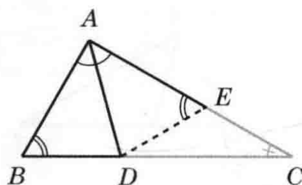


图 2-3-14

角形进行证明，添加的方法是将$\triangle BAD$沿对称轴$AD$翻折过去，这时点$B$就落在点$E$上，于是联结$DE$（图2-3-14）．由$AE=AB$，$\angle EAD=\angle BAD$和$AD=AD$，即可推得$\triangle EAD\cong\triangle BAD$，$ED=BD$，那么问题也就转化为要证$ED=EC$．

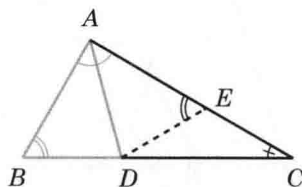


图 2-3-15

但这又是两条具有公共端点$E$的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形，问题就成为一个等腰三角形的判定问题（图2-3-15）．而由$C$、$E$、$A$成一直线，所以问题成为应证$\angle AED=2\angle ACD$，而由$\angle AED=\angle ABD$和已知$\angle ABC=2\angle ACB$，就可以证明上述性质．

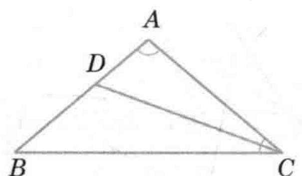


图 2-3-16

【例 2】 已知：$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=100°$，$CD$是$\angle ACB$的平分线．（图2-3-16）

求证：$BC=CD+AD$．

分析：本题要证的结论$BC=CD+AD$，是一条线段等于两条线段的和，可根据线段和差关系的定义进行分析．

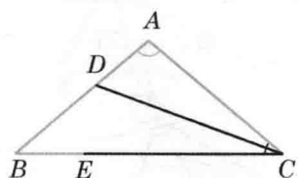


图 2-3-17

（1）若选用裁长法，即在线段$BC$上截取$CE=CD$（图2-3-17），然后证$BE=AD$．这样就出现了$CE$和$CD$是两条具有公共端点$C$的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，现在这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，所以应将底边添上，也就是联结$DE$（图2-3-18），于是可得$\angle CDE=\angle CED$．

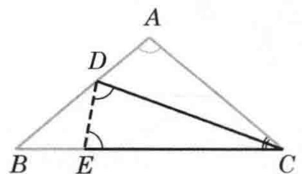


图 2-3-18

由条件$AB=AC$，$\angle BAC=100°$，可知这个等腰三角形的顶角是已知的，所以它的底角就可以求得，即$\angle ABC=\angle ACB=\dfrac{1}{2}\times(180°-100°)=40°$．又因为

$CD$ 是$\angle ACB$ 的平分线，所以$\angle BCD=\frac{1}{2}\times 40^\circ=20^\circ$.

在等腰三角形 $CDE$ 中，可求得底角，即$\angle CED=\frac{1}{2}\times(180^\circ-20^\circ)=80^\circ$.而已经证明$\angle ABC=40^\circ$，所以$\angle CED=2\angle ABC$.而由 $B$、$E$、$C$ 成一直线，又有$\angle CED$ 是$\triangle EBD$ 的外角，由此就得$\triangle EBD$ 是等腰三角形，$BE=DE$（图 2-3-19）.这样问题就转化为证 $DE=AD$.

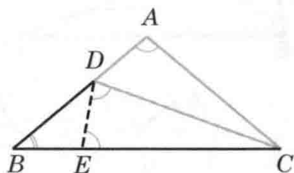


图 2-3-19

由于条件中给出 $CD$ 是$\angle ACB$ 的平分线，因此$\angle BCD$ 和$\angle ACD$ 这两个相等的角是关于$CD$ 成轴对称，从而就可以添加轴对称型全等三角形进行证明，添加的方法是将三角形沿对称轴翻折过去，即将$\triangle ACD$ 沿 $CD$ 翻折过去.于是由$\angle BCD=\angle ACD$，可知 $CA$ 必定落在 $CB$ 上，所以在 $CB$ 上截取 $CF=CA$，再联结 $DF$（图 2-3-20）即可.

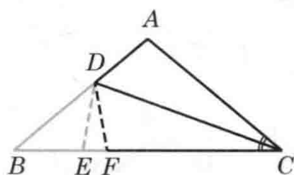


图 2-3-20

由 $CF=CA$，$\angle FCD=\angle ACD$ 和 $CD=CD$，可得$\triangle FCD\cong\triangle ACD$，$DF=DA$.

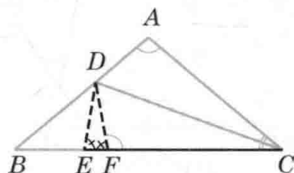


图 2-3-21

这样问题就转化为证 $DE=DF$，而这又是两条具有公共端点 $D$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形的基本图形（图 2-3-21），问题也就转化为一个等腰三角形的判定问题，所以问题又应转化为证 $DE=DF$ 的等价性质$\angle DEF=\angle DFE$.我们已证$\angle DEF=80^\circ$，从而又应证$\angle DFE$ 也等于 $80^\circ$，由于$\angle DFE$ 是$\angle DFC$ 的补角，而$\angle DFC=\angle BAC=100^\circ$，所以分析得以完成.

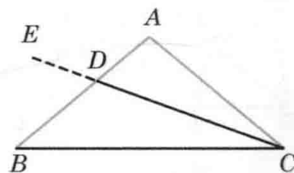


图 2-3-22

(2) 若选用补短法，即延长 $CD$ 到 $E$，使 $DE=DA$（图 2-3-22），则问题就转化为证 $CE=CB$.由于

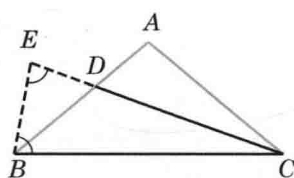


图 2-3-23

这是两条具有公共端点 C 的相等线段,它们可组成一个等腰三角形,但现在这个等腰三角形只有两条腰,而没有底边,因此应将底边添上,即联结 $BE$(图 2-3-23),然后应证 $CE=CB$ 的等价性质 $\angle CEB=\angle CBE$.

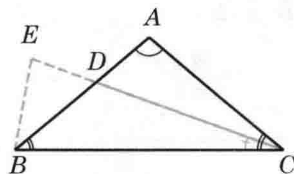


图 2-3-24

又因为 $AB=AC$,这是两条具有公共端点 $A$ 的相等线段,它们可组成一个等腰三角形(图 2-3-24),这个等腰三角形的顶角 $\angle BAC=100°$,所以 $\angle ABC=\angle ACB=40°$,而 $CD$ 是 $\angle ACB$ 的角平分线,所以 $\angle BCD=20°$,那么问题也就是要证 $\angle CEB=80°$.

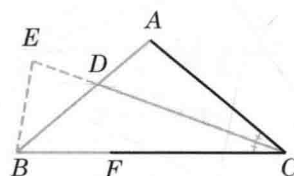


图 2-3-25

由于 $\angle BCD$ 和 $\angle ACD$ 这两个相等的角关于 $CD$ 成轴对称,因此可添加轴对称型全等三角形进行证明,添加的方法是将 $\triangle ACD$ 沿 $CD$ 翻折过去,则由 $\angle BCD=\angle ACD$,可知 $CA$ 必定落在 $CB$ 上,所以添加方法就是在 $CB$ 上截取 $CF=CA$(图 2-3-25),联结 $DF$,即可得 $\triangle ACD\cong\triangle FCD$(图 2-3-26),$DA=DF$,$\angle DFC=\angle DAC=100°$.

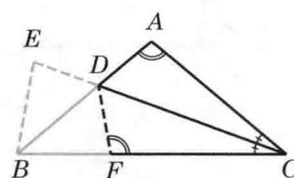


图 2-3-26

而 $B$、$F$、$C$ 成一直线,所以 $\angle BFD=80°$,这样问题就转化为要证 $\angle BED=\angle BFD$,而这一性质等价于 $\angle EBA=\angle FBA=40°$.

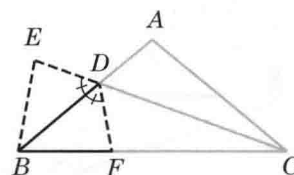


图 2-3-27

由于这两个要证明相等的角是关于 $BD$ 成轴对称的,所以可应用轴对称型全等三角形进行证明.根据图形的轴对称部分,就可以找到 $\triangle BDE$ 和 $\triangle BDF$ 是一对轴对称型全等三角形(图 2-3-27),而在这两个三角形中,已经出现的条件是 $DE=DA=DF$,$DB=DB$,所以还需要一个性质.由于上述已讨论的两组相

等的角都是结论，不能用，因此只能证明第三个角，也就是这两条对应边的夹角相等，即要证$\angle BDE=\angle BDF$.

由条件 $AB$、$CE$ 相交于 $D$，可得$\angle BDE=\angle CDA$，而在$\triangle ACD$ 中，$\angle CDA=180^\circ-100^\circ-20^\circ=60^\circ$，所以$\angle BDE=60^\circ$.而$\angle CDF=\angle CDA$，可得$\angle BDF=180^\circ-2\times60^\circ=60^\circ$，所以$\angle BDE=\angle BDF$可以证明，分析也就得以完成.

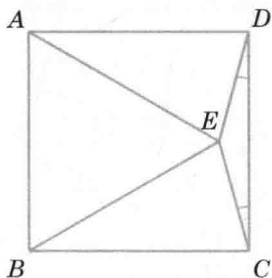


图 2-3-28

【例 3】已知：正方形 $ABCD$ 中，$E$ 是正方形 $ABCD$ 内的一点，$\angle ECD=\angle EDC=15^\circ$.联结 $AE$、$BE$.（图 2-3-28）

求证：$\triangle ABE$ 是等边三角形.

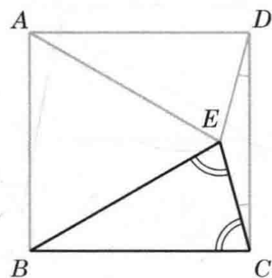


图 2-3-29

分析：本题要证明$\triangle ABE$ 是等边三角形，也就是要证明 $BE$、$AE$ 都与正方形的边长 $AB$ 相等.由条件四边形 $ABCD$ 是正方形，可知 $AB=BC$，所以问题就转化为证 $BE=BC$，这样就出现了两条具有公共端点 $B$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，问题又转化为一个等腰三角形的判定问题，这样就要证 $BE=BC$ 的等价性质$\angle BEC=\angle BCE$（图 2-3-29）.由条件$\angle ECD=15^\circ$，$\angle BCD=90^\circ$，得$\angle BCE=90^\circ-15^\circ=75^\circ$，所以问题转化为证$\angle BEC$也等于 $75^\circ$.

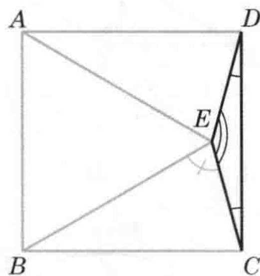


图 2-3-30

（1）由条件$\angle ECD=\angle EDC=15^\circ$，可得$\triangle ECD$是等腰三角形（图 2-3-30），且它的顶角$\angle CED=180^\circ-\angle ECD-\angle EDC=180^\circ-15^\circ-15^\circ=150^\circ$，这样问题就是要证明$\angle BEC$ 是$\angle CED$ 的一半，也就是

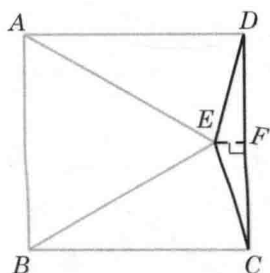


图 2-3-31

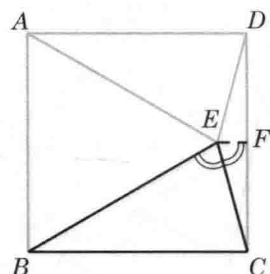


图 2-3-32

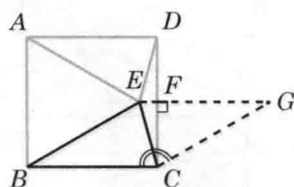


图 2-3-33

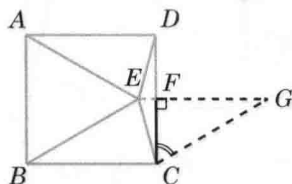


图 2-3-34

要证$\angle BEC=\frac{1}{2}\angle CED$，这样就出现了两个角之间的倍半关系，从而就可以根据角的倍半关系的定义来进行分析，也就是将倍角$\angle CED$两等分，证明倍角$\angle CED$的一半和$\angle BEC$相等，于是作$\angle CED$的平分线交$CD$于$F$.

由于出现的是等腰三角形顶角的角平分线，因此可应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质，推得$EF\perp CD$，$CF=DF$(图 2-3-31).

在作出了$\angle CED$的平分线$EF$后，问题就成为要证$\angle BEC=\angle CEF$，也就是要证明$\angle BEC$和$\angle FEC$是关于$CE$成轴对称的，所以可添加轴对称型全等三角形进行证明(图 2-3-32)，添加的方法是将以相等的对应角为内角的三角形沿对称轴翻折过去，即就将$\triangle BEC$沿$CE$翻折过去，那么$EB$就应落在$EF$和$EF$的延长线上，若设为$EG$，则$CB$必定落在$CG$上.由于$\angle BCE=75°$，因此$\angle ECG$也应等于$75°$，而已知$\angle ECF=15°$，所以$\angle FCG=75°-15°=60°$.所以作图的时候，实际上可以根据$\angle FCG$这个$60°$的角来作，也就是以$CD$为边，$C$为顶点作$\angle FCG=60°$，交$EF$的延长线于$G$，于是问题就转化为应证$\triangle BEC$和$\triangle GEC$全等(图 2-3-33).

由于已经证明$EG\perp CD$，$\angle GFC=90°$，因此$\triangle GCF$是一个角为$30°$的直角三角形，于是应用$30°$角的直角三角形的基本图形的性质(图 2-3-34)，可得$CG=2CF$，而已证$CF=DF$，即$CD=2CF$，可得$CG=CD=CB$，又因为$\angle BCE=\angle GCE=75°$，$CE$

$=CE$，所以$\triangle BEC$和$\triangle GEC$全等就得以证明，从而$\angle BEC=\angle GEC=75^\circ$，$\angle BEC=\angle BCE=75^\circ$，可得$BE=BC$.同理，也可证明$AE=AD$，分析得以完成.

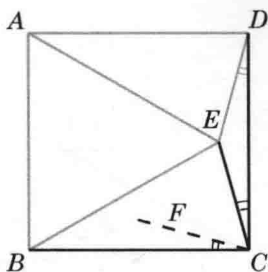


图 2-3-35

（2）本题的关键是要证明$\angle BEC=75^\circ$，对于$15^\circ$和$75^\circ$这两个角来说，它们的和是$90^\circ$，而它们的差是另一个特殊角$60^\circ$，所以$\angle BCE=75^\circ=60^\circ+15^\circ=60^\circ+\angle ECD$，这就是一个角等于两个角的和的问题，可根据角的和差关系的定义来进行分析.

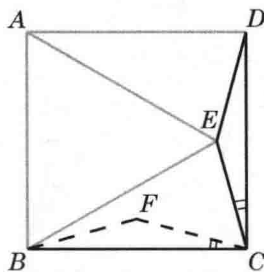


图 2-3-36

① 选取根据角的差来进行分析，即以$CB$为一边、以$C$为顶点，在$\triangle BCE$所在的一侧作$\angle BCF=\angle DCE=15^\circ$，可得$\angle ECF=75^\circ-15^\circ=60^\circ$（图 2-3-35）.

但在作出$\angle BCF=\angle DCE$后，由条件$CB=CD$，就出现了这两个相等的角$\angle BCF$和$\angle DCE$，这两条相等的线段$CB$和$CD$是关于$\angle BCD$的平分线、也就是正方形$ABCD$的对角线$AC$成轴对称的，所以可添加轴对称型全等三角形进行证明，添加的方法是将以相等的对应角为内角的三角形沿对称轴翻折过去，于是将$\triangle DCE$沿$AC$翻折过去，$CE$就应落在$CF$上，所以取$CF=CE$，并联结$BF$（图 2-3-36），就可得$\triangle DCE$和$\triangle BCF$全等，所以$\angle FBC=\angle EDC=15^\circ$，$\angle BFC=\angle DEC$.而在$\triangle DCE$中，$\angle DEC=180^\circ-15^\circ-15^\circ=150^\circ$，所以$\angle BFC=150^\circ$.

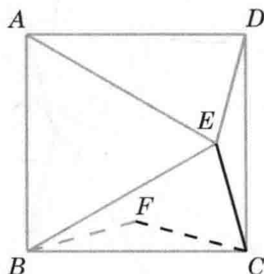


图 2-3-37

由所作的$CF=CE$，就出现了两条具有公共端点$C$的相等线段，它们可组成一个等腰三角形（图 2-3-37），但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，所以应先将底边添上，也就是联结$EF$（图 2-3-38），可得

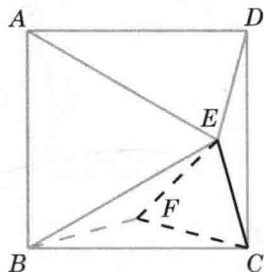


图 2-3-38

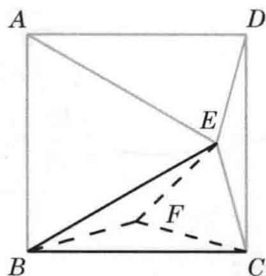


图 2-3-39

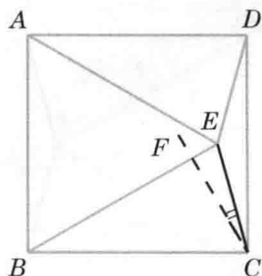


图 2-3-40

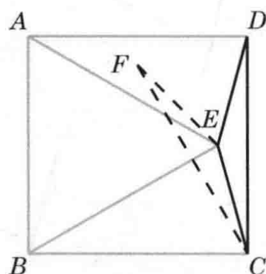


图 2-3-41

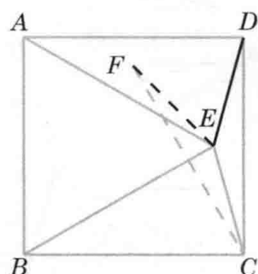


图 2-3-42

$\triangle CEF$ 是等腰三角形，而 $\angle ECF=60°$，所以 $\triangle CEF$ 是一个等边三角形，$\angle CFE=60°$，$FE=FC$.

而现在要证明的结论是 $BE=BC$，观察图形，可以发现 $\triangle FBC$ 和 $\triangle FBE$ 也是一对轴对称型全等三角形(图 2-3-39)，在这两个三角形中，已经有的条件是 $FE=FC$，$FB=FB$，第三组对应边 $BE=BC$ 是要证明的结论，不能用，所以第三个条件只能是证它们的夹角对应相等，也就是证 $\angle BFE=\angle BFC$.已证 $\angle BFC=150°$，所以问题成为要证 $\angle BFE$ 也等于 $150°$，由于 $\angle BFE=360°-\angle BFC-\angle CFE=360°-150°-60°=150°$，因此 $FBC$ 和 $\triangle FBE$ 全等，就可得 $BE=BC$，$\angle FBC=\angle FBE=15°$，从而可得 $\angle EBC=30°$，也就可得 $\angle ABE=60°$，分析就得以完成.

② 根据角的和差关系的定义来进行分析，在 $\angle BCE$ 内作一个 $15°$ 角时，也可以选取以 $EC$ 为边、以 $C$ 为顶点作 $\angle ECF=\angle ECD=15°$(图 2-3-40)，而这两个相等的角是关于 $CE$ 成轴对称的，于是可添加轴对称型全等三角形进行证明.添加的方法是将以相等的对应角为内角的三角形沿对称轴翻折过去，即将 $\triangle DCE$ 沿 $CE$ 翻折过去，那么 $CD$ 就应落在 $CF$ 上，所以取 $CF=CD$，并联结 $EF$(图 2-3-41)，可得 $\triangle DCE\cong\triangle FCE$.

所以有 $ED=EF$，$CD=CF$，$\angle FEC=\angle DEC=150°$.由 $ED=EF$，就出现了两条具有公共端点 $E$ 的相等线段，它们可组成一个等腰三角形(图 2-3-42)，但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，于是

应先将底边添上，也就是联结 $DF$(图 2-3-43)，可得 $\triangle EDF$ 是等腰三角形，又由 $\angle DEF = 360^\circ - \angle FEC - \angle DEC = 360^\circ - 150^\circ - 150^\circ = 60^\circ$，所以 $\triangle EDF$ 是一个等边三角形，可得 $DF = DE = CE$，$\angle EDF = 60^\circ$.

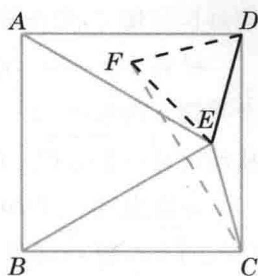


图 2-3-43

现在要证明的是 $BE = BC = CD = CF$，所以就出现了 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CDF$ 是一对绕正方形中心旋转 $90^\circ$ 的全等三角形(图 2-3-44)，全等的条件已经有 $BC = CD$，$CE = DF$，所以还应证明它们的夹角相等，也就是要证 $\angle BCE = \angle CDF$. 由于 $\angle BCE = \angle BCD - \angle ECD = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$，而 $\angle CDF = \angle CDE + \angle EDF = 15^\circ + 60^\circ = 75^\circ$，因此 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CDF$ 全等可以证明，可得 $BE = CF = CD = BC$，$\angle EBC = \angle FCD = \angle ECD + \angle ECF = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$，从而可证明 $\angle ABE = 60^\circ$，分析得以完成.

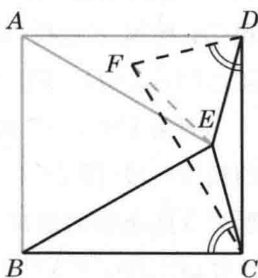


图 2-3-44

【例 4】已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 2\angle ABC$，$D$ 是 $\triangle ABC$ 内的一点，$AD = AC$，$DB = DC$.(图 2-3-45)

求证：$\angle BAC : \angle BAD$ 等于定值.

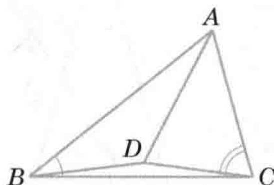


图 2-3-45

分析：本题条件中给出了 $\angle ACB = 2\angle ABC$，是两个角之间的倍半关系，所以可根据角的倍半关系的定义，作出 $\angle ABC$ 的两倍角，于是以 $B$ 为顶点，以 $BC$ 为边作 $\angle CBE = 2\angle ABC$(图 2-3-46)，那么 $\angle CBE = \angle ACB$.

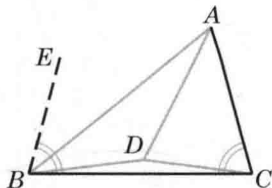


图 2-3-46

在作出了 $\angle CBE = \angle ACB$ 后，可以发现它们是在线段 $BC$ 的两端且与 $BC$ 交成相等的两个角，于是可添加等腰三角形的基本图形进行证明. 现在图形中这个等腰三角形是有底边而两条腰尚未相交，应将它

们延长至相交，也就是延长 $CA$ 与 $BE$ 相交于 $E$(图 2-3-47)，可得 $EB=EC$.

已知 $DB=DC$，这是两条具有公共端点 $D$ 的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形(图 2-3-48)，应用等腰三角形的性质，可得 $\angle DBC=\angle DCB$，从而可进一步推得 $\angle DBE=\angle DCA$.

可以发现，$\angle DBE$、$\angle DCA$ 这两个相等的角位于等腰三角形的轴对称部分(图 2-3-49)，可添加轴对称型全等三角形进行证明.添加的方法是将以 $\angle DCA$ 为内角的 $\triangle ADC$ 沿对称轴翻折过去，由于翻折过去时，点 $D$ 是不动的，点 $C$ 应落在点 $B$ 上，所以 $CA$ 就落到 $BE$ 上，假设点 $A$ 落在点 $F$，那么 $BF$ 必定和 $CA$ 相等.于是在 $BE$ 上截取 $BF=CA$，联结 $DF$(图 2-3-50)，可得 $\triangle ADC \cong \triangle FDB$，$AD=FD=AC=FB$.

而由 $EB=EC$ 和 $BF=CA$，可得 $EF=EA$，这也是两条具有公共端点 $D$ 的相等线段(图 2-3-51)，它们也可以组成一个等腰三角形，但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，所以应将底边添上，也就是联结 $FA$(图 2-3-52)，这样就出现了 $\triangle EFA$ 和 $\triangle EBC$ 是两个具有公共顶角的等腰三角形(图 2-3-

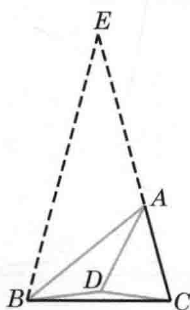


图 2-3-47

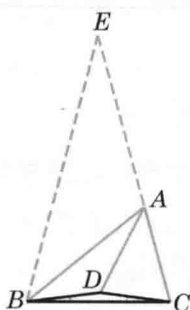


图 2-3-48

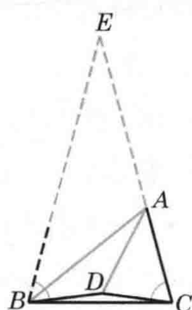


图 2-3-49

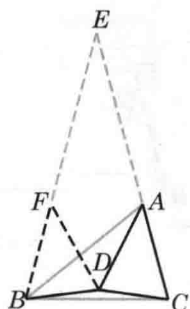


图 2-3-50

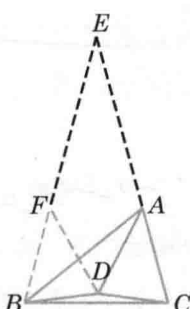


图 2-3-51

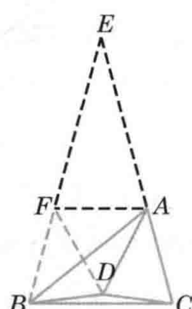


图 2-3-52

53)，它们的底角一定相等，所以 $FA /\!/ BC$.

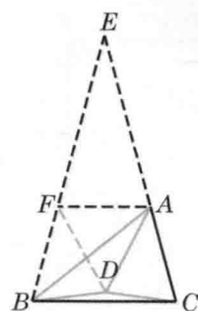


图 2-3-53

又因为 $BA$ 是 $\angle CBE$ 的平分线，出现了角平分线和平行线的组合，所以一定得到一个等腰三角形的基本图形. 由于 $FA$ 是角的一边 $BC$ 的平行线，因此它应和角的另一边 $BE$ 同角平分线 $BA$ 相交组成等腰三角形，可得 $\triangle FAB$ 是等腰三角形（图 2-3-54），即 $FA=FB$，这样就可进一步推得 $FA=FD=AD$，$\triangle ADF$ 是等边三角形，应用等边三角形的性质，可得 $\angle DAF=60°$.

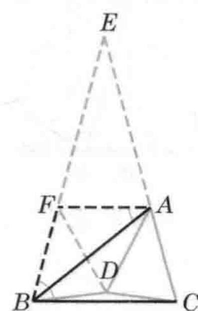


图 2-3-54

这样，$\angle BAD$ 就等于 $\angle DAF-\angle BAF=60°-\angle BAF$，由于已经证明 $\angle BAF=\angle ABC$，所以 $\angle BAD=60°-\angle ABC$.

而 $\angle BAC$ 是 $\triangle ABC$ 的一个内角，所以 $\angle BAC=180°-\angle ABC-\angle ACB$，已知 $\angle ACB=2\angle ABC$，可得 $\angle BAC=180°-\angle ABC-2\angle ABC=180°-3\angle ABC$，从而可得 $\angle BAC=3\times(60°-\angle ABC)=3\angle BAD$.

所以 $\angle BAC : \angle BAD=3$，即它们的比是定值 3.

由于本题分析的关键是作出等腰梯形 $AFBC$，因此在添加辅助线时，可以直接过 $A$ 作 $AF /\!/ CB$ 交 $BE$ 于 $F$，再联结 $DF$ 来完成证明，但这时要讲清楚这条辅助线是怎样想出来的难度就比较大了.

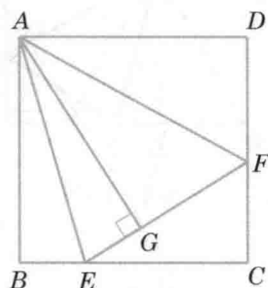


图 2-3-55

【例 5】已知：正方形 $ABCD$ 中，$E$ 是 $BC$ 上一点，$F$ 是 $CD$ 上一点，联结 $AE$、$AF$，$\angle EAF=45°$. 联结 $EF$，$AG\perp EF$，垂足是 $G$.（图 2-3-55）

求证：$AG=AB$.

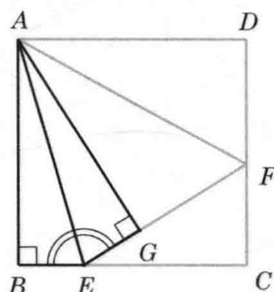


图 2-3-56

分析：本题要证明 $AG=AB$，而已知四边形 $ABCD$ 是正方形，$\angle ABE=\angle AGE=90°$，且又有 $AE=AE$，就可得 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AEG$ 是一对轴对称型全等三角形（图 2-3-56）. 由于 $AG=AB$ 是要证明的结

论，不能用，因此必定要另外再得到一个条件.

因为$AG$和$AB$这两条要证明相等的线段是$A$点到$\angle BEG$的两边的距离，所以$EA$必定是$\angle BEG$的角平分线，问题就转化为证明$\angle AEB=\angle AEG$.

而这两个相等的角是关于$EA$成轴对称的，于是仍然可以添加轴对称型全等三角形进行证明.添加的方法是将以相等的对应角为内角的三角形沿对称轴翻折过去.

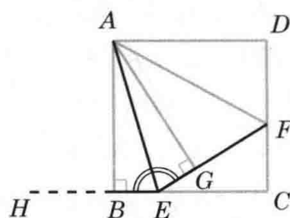


图 2-3-57

由于以$\angle AEG$为内角的三角形有两个，即$\triangle AEG$和$\triangle AEF$，但将$\triangle AEG$沿对称轴$EA$翻折过去，图形没有任何变化，也不出现任何新的性质，因此要选择将$\triangle AEF$沿对称轴$EA$翻折过去.当$\triangle AEF$沿对称轴$EA$翻折过去以后，$EF$就落在$EB$的延长线上(图 2-3-57)，那么$AF$应落在哪里呢?

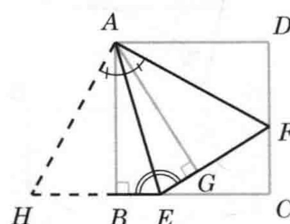


图 2-3-58

由于已知$\angle EAF=45°$，因此$AF$落下去的$AH$也应与$AE$交成$45°$，从而就有$\angle EAH=\angle EAF=45°$，$\angle FAH=\angle EAH+\angle EAF=45°+45°=90°$，也就是$FA\perp HA$.

所以将$\triangle AEF$沿对称轴$EA$翻折过去的作图方法就是过$A$作$HA\perp FA$交$CB$的延长线于$H$(图 2-3-58)，即得$\triangle AEH$和$\triangle AEF$必定是一对轴对称型全等三角形.

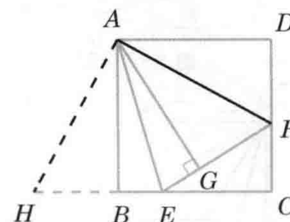


图 2-3-59

由于已经有的条件是$\angle EAH=\angle EAF=45°$，$AE=AE$，而$\angle AEH=\angle AEF$是要证明的结论，因此第三个性质只能是证一组边对应相等.即证明$AH=AF$(运用S.A.S)(图 2-3-59).

这是两条具有公共端点$A$的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，又因为作出的$\angle FAH=90°$，所以这个三角形是等腰直角三角形，也就是半个正方形，又因为四边形$ABCD$是正方形，所以出现了两个

具有公共顶点 A 的正方形，从而可应用旋转型全等三角形进行证明.

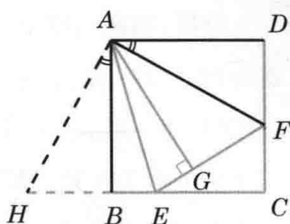


图 2-3-60

根据由公共顶点 $A$ 发出的两组相等线段 $AB$、$AD$ 和 $AH$、$AF$ 两两组成全等三角形(图 2-3-60)的方法，可以找到这对全等三角形应是 $\triangle ABH$ 和 $\triangle ADF$(图 2-3-61).

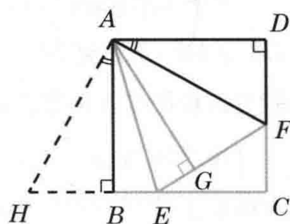


图 2-3-61

在这两个三角形中，已经有的条件是 $AB=AD$，$\angle ABH=\angle ADF=90^\circ$，又由 $\angle FAD+\angle FAB=\angle BAD=90^\circ$，而 $\angle HAB+\angle FAB=\angle HAF=90^\circ$，可得 $\angle HAB=\angle FAD$，所以 $\triangle ABH\cong\triangle ADF$，$AH=AF$.

这样可以进一步证明 $\triangle AEH$ 和 $\triangle AEF$ 全等，从而证明 $\angle AEH=\angle AEF$，分析得以完成.

在全等三角形这一专题的教学中，通过将三角形沿对称轴翻折过去，得到轴对称型全等三角形这种添线方法是难点，不经过专门的学习，许多学生掌握起来都会相当困难，关键是要使学生明白在什么情况下会想到将三角形沿对称轴翻折过去，以及具体翻折过去的方法是什么.如果需要集中进行这种添线方法的教学，同样可以在《几何王》软件的“智能搜索”功能中，选择左边栏筛选条件中的“基本图形”，鼠标依次悬停在“全等三角形”→“轴对称型全等三角形”，最后点击“全等三角形—(3)”图标，就可以将所有应用这种添线方法的习题全部搜索出来，在教学中使用.

【例 6】已知：正方形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$E$ 是 $BC$ 的延长线上一点，$F$ 是 $CD$ 的延长线上一点，$\angle EAF=45^\circ$，$AE$ 与 $CD$ 相交于点 $G$.(图 2-3-62)

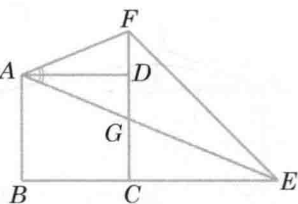


图 2-3-62

问：$\triangle EGF$ 与 $\triangle EFA$ 能否相似？若能相似，求出此时 $BE$ 的值，若不能相似，请说明理由.

分析：如果$\triangle EGF$与$\triangle EFA$相似，那么$\angle EFG$就应和$\angle EAF$相等，这样就出现了$FG$是过$\triangle EFA$的顶点$F$的边$AF$的逆平行线，所以$\triangle EGF$与$\triangle EFA$是一对由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形（图2-3-63）．由于已知$\angle EAF=45°$，因此$\angle EFG$也应等于$45°$，而$FC\perp CE$，所以$\triangle ECF$是一个等腰直角三角形（图2-3-64），从而当$\triangle ECF$是一个等腰直角三角形时，$\triangle EGF$与$\triangle EFA$就能相似．

现在的问题是求$BE$的值，而$BE=BC+CE=BC+CF=BC+CD+DF=2BC+DF$，于是有$BE-DF=2BC$，这样就出现了$BE$、$DF$这两条线段的差，所以就可以根据线段和差关系的定义，在$BE$上截取$BH=DF$（图2-3-65）．

由于四边形$ABCD$是正方形，$AB=AD$，且$\angle ABH=\angle ADF=90°$，因此在截取了$BH=DF$后，就可发现$\triangle ABH$和$\triangle ADF$是一对旋转型全等三角形．于是联结$AH$（图2-3-66），就可得$\triangle ABH\cong\triangle ADF$，$AH=AF$，$\angle BAH=\angle DAF$．

由于旋转角$\angle BAD=90°$，因此可得另一个旋转角$\angle HAF=90°$．又因为$AH$和$AF$是两条具有公共端点$A$的相等线段，所以它们可以组成一个等腰三角形（图2-3-67），现在这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，故应先将这条底边添上，也就是联结$HF$（图2-3-68）．

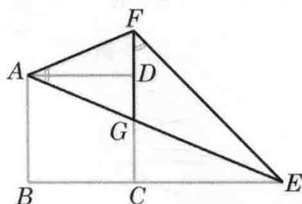


图2-3-63

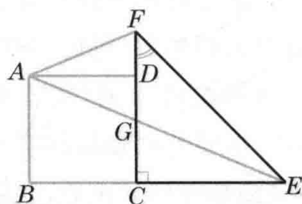


图2-3-64

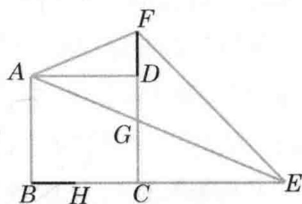


图2-3-65

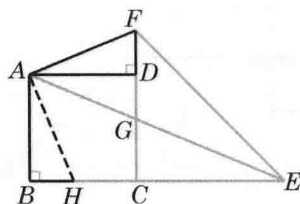


图2-3-66

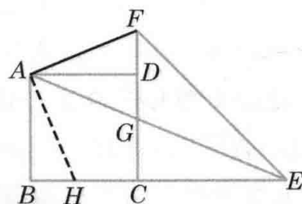


图2-3-67

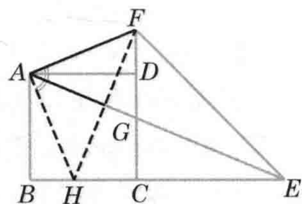


图2-3-68

又因为条件给出$\angle EAF=45^{\circ}$，所以$\angle EAH=\angle HAF-\angle EAF=90^{\circ}-45^{\circ}=45^{\circ}$，所以$\angle EAF=\angle EAH$，这样就出现了等腰三角形的顶角的角平分线，于是可应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质进行证明，可得$AE$是$HF$的垂直平分线(图2-3-69).

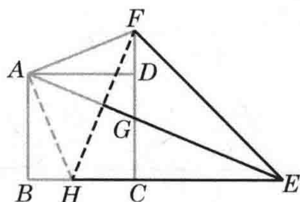


图2-3-69

从而再应用一次线段垂直平分线的性质就可以证明$EH=EF$，所以$HE=HC+CE=(1-BH)+CF=(1-BH)+(1+DF)=2$，从而可得$FE=2$，那么在等腰直角$\triangle ECF$中，可求得$CE=\sqrt{2}$，已知$BC=1$，所以$BE=BC+CE=\sqrt{2}+1$.

## 二、中心对称型

$AD\parallel BC$，$AD=BC$，$AC$、$BD$相交于$E\Rightarrow\triangle AED\cong\triangle CEB$(图2-3-70)

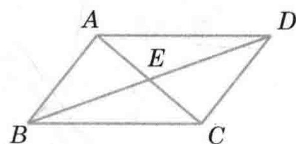


图2-3-70

$AC$、$BD$相交于$E$，$AE=CE$，$BE=DE\Rightarrow\triangle AED\cong\triangle CEB$

平行四边形$ABCD$中，$AC$、$BD$相交于$E\Rightarrow\triangle AED\cong\triangle CEB$，$\triangle ABC\cong\triangle CDA$

中心对称型全等三角形应用的第一种情况是两条相等的线段或两个相等的角位于一个平行四边形的中心对称部分，可以应用中心对称型全等三角形进行证明，根据图形的中心对称部分就能找到全等三角形.

中心对称型全等三角形应用的第二种情况是出现了两条平行且相等的线段，应用的方法是将四个端点两两联结并相交，就可得到中心对称型全等三角形.

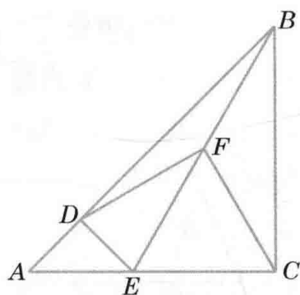


图 2-3-71

中心对称型全等三角形应用的第三种情况是出现了两条相等的线段位于一组对顶角的两边而且成一直线，应用的方法是过两个端点作平行线，且作到与过中点的直线相交.

中心对称型全等三角形应用的第四种情况是出现了两组相等线段位于同一组对顶角的两边而且成一直线，应用的方法是将四个端点两两联结，这两条连线一定平行且相等.

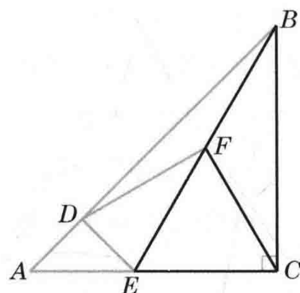


图 2-3-72

【例 7】已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，$D$ 是 $AB$ 上一点，$DE\perp AB$ 交 $AC$ 于 $E$，$F$ 是 $BE$ 的中点，联结 $FD$、$FC$.（图 2-3-71）

请探索 $FD$、$FC$ 的数量关系和位置关系，并进行证明.

分析：观察图形可以发现并判断 $FD$、$FC$ 这两条线段是相等且互相垂直，所以问题就是证 $FD=FC$，$FD\perp FC$.

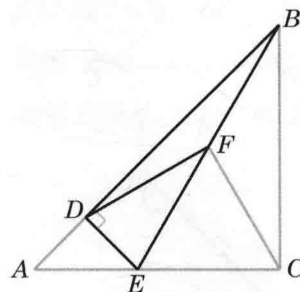


图 2-3-73

由 $\angle BCE=90^\circ$，$F$ 是 $BE$ 的中点，即 $F$ 是直角 $\triangle EBC$ 的斜边 $BE$ 的中点（图 2-3-72），于是可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明，可得 $CF=\frac{1}{2}BE=FE$.同理又可得 $DF=\frac{1}{2}BE=FE$（图 2-3-73），从而就可推得 $FD=FC$.

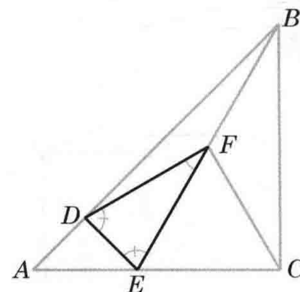


图 2-3-74

接下来就应证明 $FD\perp FC$.$\angle DFC=\angle DFE+\angle CFE=90^\circ$，由于已经证明 $DF=FE$，这是两条具有公共端点 $F$ 的相等线段，因此它们可以组成等腰三角形 $FDE$（图 2-3-74）.同理，$\triangle FEC$ 也是等腰三角形（图 2-3-75）.

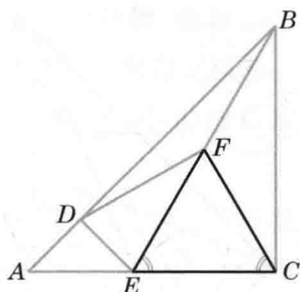


图 2-3-75

而要证明的$\angle DFE+\angle CFE$就是这两个等腰三角形的顶角的和，所以问题就转化为要讨论它们的底角之间的数量关系.

由于这两个等腰三角形的底角$\angle FED$和$\angle FEC$之和就是$\angle DEC$，$\triangle ADE$是等腰直角三角形，$\angle DEA=45^\circ$，因此$\angle DEC=180^\circ-\angle DEA=135^\circ$，从而可证得$\angle DFC=360^\circ-2\angle DEC=360^\circ-2\times135^\circ=90^\circ$，所以$FD\perp FC$.

【例 8】已知：$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，$D$是$AB$上的一点，$DE\perp AB$交$AC$于$E$.将$\triangle ADE$绕$A$点顺时针旋转成$\triangle AFG$，点$F$在$AC$上，$H$是$BG$的中点，联结$HF$、$HC$.(图 2-3-76)

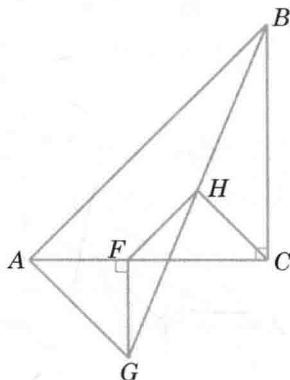


图 2-3-76

请探索$HF$、$HC$的数量关系和位置关系，并进行证明.

分析：观察图形可以发现并判断$HF$、$HC$这两条线段是相等且互相垂直，所以问题就转化为证$HF=HC$和$HF\perp HC$.

由于$HF$和$HC$是两条具有公共端点$H$的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，问题就转化为一个等腰三角形的判定问题，因此就应证明$\angle HFC=\angle HCF$.

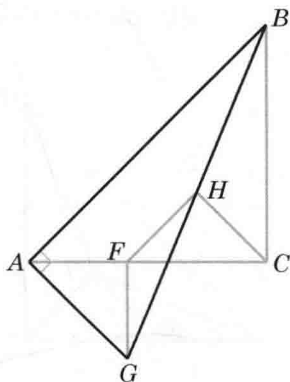


图 2-3-77

由于条件给出$\triangle ABC$和$\triangle AGF$都是等腰直角三角形，因此$\angle CAB=\angle FAG=45^\circ$，可得$\angle BAG=45^\circ+45^\circ=90^\circ$，$\triangle BGA$是直角三角形(图 2-3-77)，又因为$H$是$BG$的中点，即$H$是直角三角形$BGA$的斜边$BG$的中点，所以可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明.现在图形中是有直角三角形而没有斜边上的中线，于是将斜边上的中线添上，也就是联

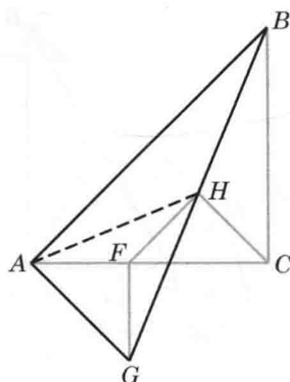


图 2-3-78

结 AH(图 2-3-78),可得 $AH=\frac{1}{2}BG=HG=HB$.

在得到了 $AH=HG$ 以后,因为 $AF=GF$,$FH=FH$,所以$\triangle AHF$ 和$\triangle GHF$ 是一对轴对称型的全等三角形(图 2-3-79),可得$\angle HFA=\angle HFG$.因为$\angle AFG=90°$,所以$\angle HFA=\angle HFG=\frac{1}{2}(360°-\angle AFG)=135°$.又因为 A、F、C 成一直线,所以$\angle HFC=45°$,这样问题就转化为要证明$\angle HCF$ 也等于 45°.

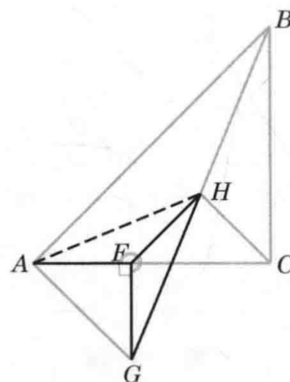


图 2-3-79

由于条件给出$\angle ACB=90°$,因此要证明$\angle HCF$ 等于 45°,就是证明$\angle HCF$ 和$\angle HCB$ 相等.可以发现,这两个要证明相等的角是关于 CH 成轴对称的,于是可应用轴对称型全等三角形进行证明,根据图形的轴对称部分,可以找到这对全等三角形应是$\triangle HCA$ 和$\triangle HCB$(图 2-3-80),全等的条件是 $CA=CB$,$HA=HB$,$CH=CH$,可得$\angle HCA=\angle HCB$,因为这两个角的和是 90°,所以$\angle HCA=\angle HCB=45°$.

从而又可进一步推得$\triangle HFC$ 是等腰直角三角形,$HF\perp HC$,分析得以完成.

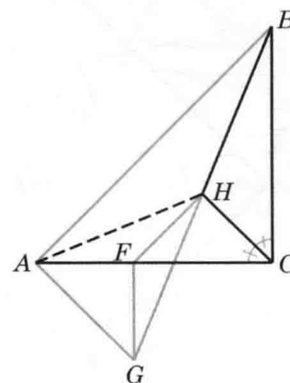


图 2-3-80

【例 9】 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC=BC$,过 A 作线段 AD,$DE\perp DA$,$DE=DA$,F 是 BE 的中点,联结 AE、CD、FD、FC.(图 2-3-81)

求证:$\triangle FDC$ 是等腰直角三角形.

分析:要证明$\triangle FDC$ 是等腰直角三角形,首先就是要证明$\angle FCD=45°$(图 2-3-82),而已知$\angle ACB=90°$,于是问题就转化为证明$\angle DCA+\angle FCB$ 也等于 45°.

这是两个角的和的问题,可根据角的和的定义,

将这两个角拼到一起，于是就可将$\angle DCA$拼到$\angle FCB$的外侧，也就是作$\angle BCG=\angle DCA$（图 2-3-83）.因为$\angle DCA+\angle DCB=90^\circ$，所以$\angle BCG+\angle DCB=\angle DCG=90^\circ$.于是将$\angle DCA$拼到$\angle FCB$的外侧的作图，即过$C$作$CG\perp CD$，得到$\angle BCG=\angle DCA$.

由于是将$\angle DCA$拼过来，因此就应取$CG=CD$，于是$\triangle CAD$和$\triangle CBG$是一对旋转型全等三角形.

于是联结$BG$（图 2-3-84），由$CA=CB$，$\angle DCA=\angle GCB$，$CD=CG$，可以证明这两个三角形全等，所以$AD=BG$，$\angle DAC=\angle GBC$.而$\angle ACB=90^\circ$就是旋转角，所以可进一步证明$AD\perp BG$，而已知$AD\perp DE$，故$DE\parallel BG$.

又因为$AD=DE$，所以$DE=BG$，故$DE$和$BG$平行且相等，可应用中心对称型全等三角形进行证明.

找中心对称型全等三角形的方法是将这两条线段的四个端点两两联结起来，于是联结$FG$（图 2-3-85），由$EF=BF$，$\angle FED=\angle FBG$和$DE=GB$，就

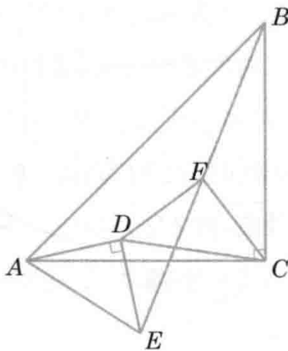


图 2-3-81

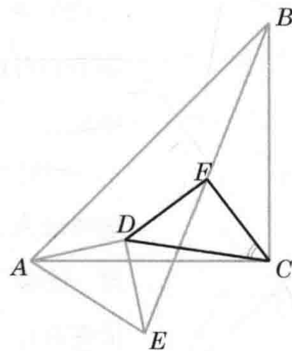


图 2-3-82

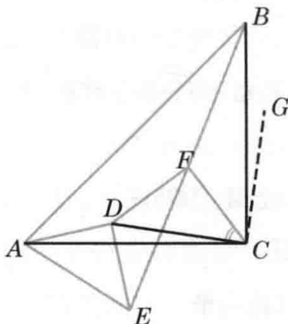


图 2-3-83

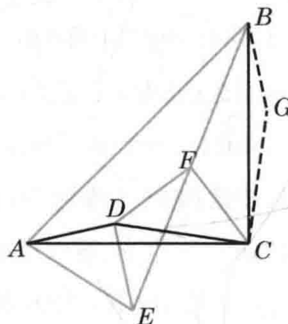


图 2-3-84

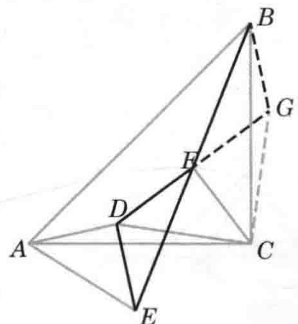


图 2-3-85

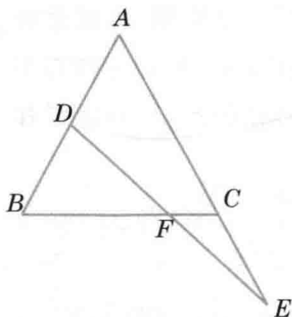


图 2-3-86

可证明$\triangle EDF$和$\triangle BGF$是一对中心对称型全等三角形，所以$DF=GF$，$\angle DFE=\angle GFB$.

从而在证明了$D$、$F$、$G$成一直线后，可以证明$\triangle CDG$是等腰直角三角形，并进一步证明$\triangle FDC$也是等腰直角三角形.

【例 10】已知：$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$D$是$AB$上的一点，延长$AC$到$E$，使$BD=CE$，$BC$、$DE$相交于$F$.(图 2-3-86)

求证：$DF=EF$.

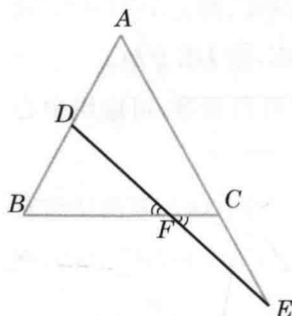


图 2-3-87

分析：本题要证明的结论是$DF=EF$，而条件中又给出$DE$和$BC$相交于$F$，也就是要证明相等的两条线段$DF$和$EF$是位于一组对顶角$\angle DFB$和$\angle EFC$的两边且成一直线(图 2-3-87)，从而可添加中心对称型全等三角形进行证明，添加的方法是过端点作平行线.

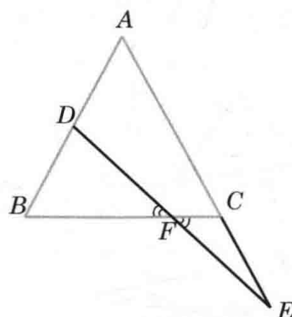


图 2-3-88

(1) 在添加平行线时，首先应选取过端点$D$和$E$的线段为平行方向线段，由于图形中过端点$E$有线段$EC$，过端点$D$有线段$DB$，因此可首先选取这两种可能性进行讨论.

① 若取过端点$E$的线段$EC$为平行方向线段(图 2-3-88)，则过$D$作$DG/\!/AE$交$BC$于$G$(图 2-3-89)，那么$\triangle DFG$和$\triangle EFC$就是一对中心对称型全等三角形.

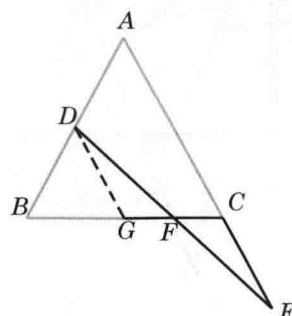


图 2-3-89

在这两个三角形中，已经有$\angle DFG=\angle EFC$，$\angle DGF=\angle ECF$，所以还应证一组边对应相等，因为条件中还给出$CE=BD$，所以就应证明$CE$和它的对应边$GD$相等，即证$DG=DB$.

这是两条具有公共端点 $D$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形(图 2-3-90)，问题也就转化为一个等腰三角形的判定问题，所以应证 $DG=DB$ 的等价性质$\angle DBG=\angle DGB$.

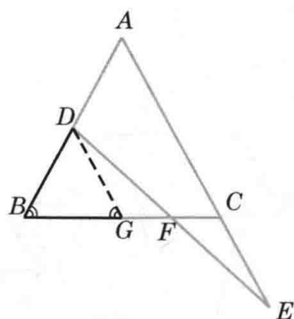


图 2-3-90

由于 $DG/\!/AC$，这两条平行线 $DG$、$AC$ 可以看作是被 $BC$ 所截，$\angle DGB$ 和$\angle ACB$ 可以看作是一组同位角(图 2-3-91)，因此可应用与同位角有关的平行线的基本图形进行证明，可得$\angle DGB=\angle ACB$.

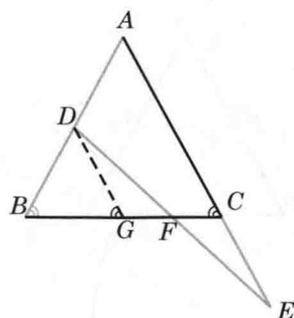


图 2-3-91

而由 $AB=AC$，又可得$\angle DBG=\angle ACB$，从而可证明$\angle DBG=\angle DGB$，就可以完成分析.

② 若选取过端点 $D$ 的线段 $DB$ 为平行方向线段，则过 $E$ 作 $EG/\!/BA$ 交 $BC$ 的延长线于 $G$(图 2-3-92)，可得$\angle ABC=\angle EGC$.

由 $AB=AC$，得$\angle ABC=\angle ACB$，而$\angle ACB=\angle ECG$，可得$\angle ECG=\angle EGC$，$EC=EG$.

已知 $CE=BD$，所以 $EG=DB$，又有$\angle DBF=\angle EGF$ 和$\angle DFB=\angle EFG$，可以证明$\triangle DBF$ 和$\triangle EGF$ 是一对中心对称型全等三角形，从而可完成分析.

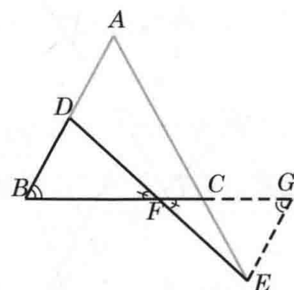


图 2-3-92

(2) 若在取平行方向线段时，选择一个特殊的方向——与 $BC$ 垂直的方向作为平行线的方向，则平行线可过两个端点作，也就是过 $D$、$E$ 分别作 $DG\perp BC$、$EH\perp BC$，并交 $BC$ 和 $BC$ 的延长线于 $G$、$H$(图 2-3-93)，这样$\triangle DFG$ 和$\triangle EFH$ 就是一对中心对称型全等三角形.

在这两个三角形中，有$\angle DFG=\angle EFH$，$\angle DGF=\angle EHF=90°$，所以还要再证一组边对应相等.

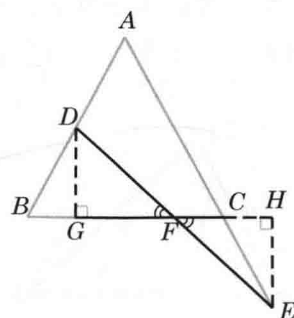


图 2-3-93

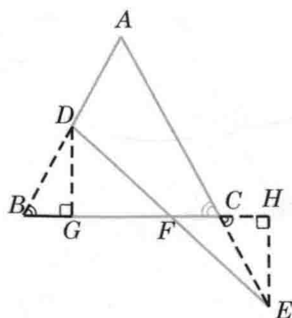


图 2-3-94

由 $BD=CE$，$\angle DBG=\angle ACB=\angle ECH$ 和 $\angle DGB=\angle EHC=90°$，可以得到 $\triangle BDG\cong\triangle CEH$（图 2-3-94），从而有 $DG=EH$，分析就可以完成.

(3) 本题在过端点 $D$ 和 $E$ 作平行线时，只要作到和过中点 $F$ 的直线相交，就一定构成中心对称型全等三角形，那么假如不相交呢？也就是过端点 $D$、$E$ 所作的平行线与 $BC$ 不相交，即和 $BC$ 平行，这样中心对称型全等三角形就不会出现，但这时出现了过线段的中点所作的边的平行线，即出现了三角形中位线的基本图形.

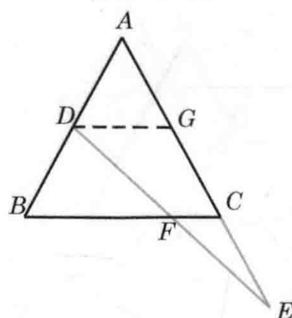


图 2-3-95

在具体添加时，由于 $BC$ 已是平行线中的一条，因此平行线只要过一个端点作即可.

① 若选取过端点 $D$ 作平行线，则过 $D$ 作 $DG/\!/FC$ 交 $AC$ 于 $G$（图 2-3-95）. 由 $AB=AC$ 和 $DG/\!/BC$，可得 $AD=AG$，$BD=CG$. 已知 $BD=CE$，于是 $CG=CE$，而已作 $GD/\!/CF$（图 2-3-96），所以 $DF=EF$ 就得以证明.

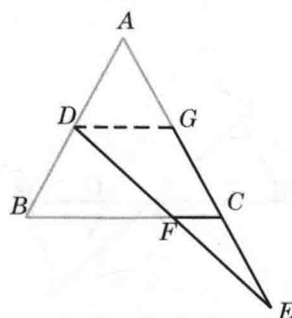


图 2-3-96

② 若选取过端点 $E$ 作平行线，则过 $E$ 作 $EG/\!/FB$ 交 $AB$ 的延长线于 $G$（图 2-3-97），那么由 $AB=AC$ 和 $BC/\!/GE$，推得 $BG=CE$，所以 $BG=BD$. 再由 $BF/\!/GE$，就可证明 $DF=FE$.

如果需要集中进行中心对称型全等三角形的教学，可以在《几何王》软件的“智能搜索”功能中，选择左边栏筛选条件中的“基本图形”，鼠标悬停在“全等三角形”，最后点击“中心对称型全等三角形”，就可以将所有有关中心对称型全等三角形的习题全部搜索出来.

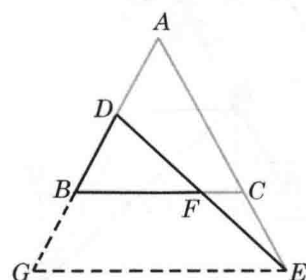


图 2-3-97

## 三、旋转型

$AB=AD$，$AC=AE$，$\angle BAD=\angle CAE\Rightarrow\triangle ABC\cong\triangle ADE$，$\angle ABD=\angle ACE$，$\angle ADB=\angle AEC$（图 2－3－98）

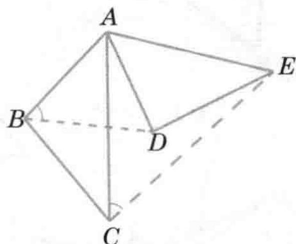


图 2－3－98

因为$AB=AD$，这是两条具有公共端点的相等线段，所以它们可以组成一个等腰三角形.同样，由$AC=AE$，它们也可以组成一个等腰三角形，而这两个等腰三角形的顶角是相等的，所以这两个等腰三角形一定相似.而由$\angle ABD=\angle ACE$和$\angle ADB=\angle AEC$，若延长$BD$与$CE$相交，则可得两个圆内接四边形.

所以，在一对旋转型全等三角形的基本图形中，一定同时出现一对相似的等腰三角形和两个圆内接四边形.

旋转型全等三角形应用的第一种情况是出现了由一点发出的两组交成等角的相等线段，应用的方法是将这两组相等线段两两组成旋转型全等三角形.

旋转型全等三角形应用的第二种情况是出现了两个具有公共顶点的等边三角形（因为所有的等边三角形都相似），应用的方法是将由这个公共顶点发出的两组相等线段（等边三角形的边）两两组成旋转型全等三角形.

旋转型全等三角形应用的第三种情况是出现了两个具有公共顶点的正方形或具有公共直角顶点的等腰直角三角形（因为所有的等腰直角三角形都相似），应用的方法是将由这个公共顶点发出的两组相等线段（正方形的边）两两组成旋转型全等三角形.

【例 11】已知：$\triangle ABC$中，以$AB$为边在$\triangle ABC$外作等边三角形$ABD$，以$AC$为边在$\triangle ABC$外作等边三角形$ACE$，联结$BE$、$CD$.（图 2－3－99）

求证：$CD=BE$.

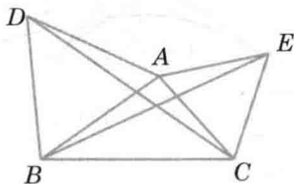


图 2－3－99

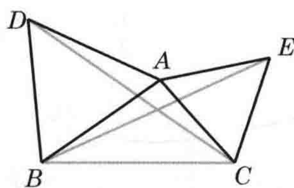


图 2-3-100

分析:在本题的条件中,出现了两个以 $A$ 为公共顶点的等边三角形 $ABD$ 和等边三角形 $ACE$(图 2-3-100),从而必定出现一对旋转型全等三角形.

根据由公共顶点 $A$ 发出的两组相等线段 $AD$、$AB$ 和 $AC$、$AE$ 两两组成全等三角形的方法,可找到这一对全等三角形是 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABE$(图 2-3-101).

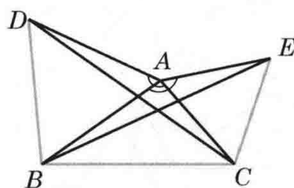


图 2-3-101

全等的条件是:$AD=AB$,$AC=AE$,它们的夹角 $\angle DAC$ 和 $\angle BAE$ 都等于旋转角 $60°$加上公共部分 $\angle BAC$,因此 $CD=BE$ 就可以证明.

【例 12】已知:$\triangle ABC$ 中,以 $AB$ 为边在 $\triangle ABC$ 外作等边三角形 $ABD$,以 $AC$ 为边在 $\triangle ABC$ 外作等边三角形 $ACE$,$CD$、$BE$ 相交于 $F$,联结 $AF$.(图 2-3-102)

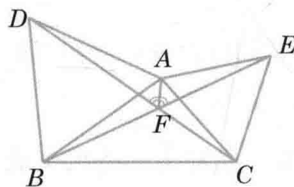


图 2-3-102

求证:$AF$ 平分 $\angle DFE$.

分析:本题的条件中,出现了两个以 $A$ 为公共顶点的等边三角形 $ABD$ 和等边三角形 $ACE$(图 2-3-103),从而必定出现一对旋转型全等三角形.

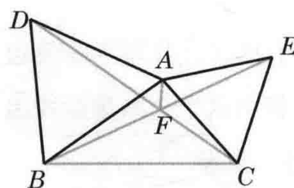


图 2-3-103

根据由公共顶点 $A$ 发出的两组相等线段 $AD$、$AB$ 和 $AC$、$AE$ 两两组成全等三角形的方法,可找到这对全等三角形是 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABE$(图 2-3-104),全等的条件是 $AD=AB$,$AC=AE$,它们的夹角 $\angle DAC$ 和 $\angle BAE$ 都等于旋转角 $60°$ 加上公共部分 $\angle BAC$.

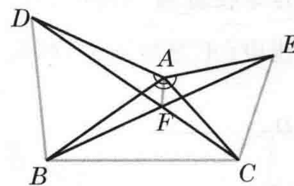


图 2-3-104

(1) 在证明了 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABE$ 是一对旋转型全等三角形以后,由于在旋转型全等三角形的基本图形中,必定同时出现两个圆内接四边形,因此就可由

$\triangle ADC \cong \triangle ABE$，推得$\angle ADF = \angle ABF$，从而可进一步推得$A$、$D$、$B$、$F$四点共圆（图2-3-105），可得$\angle AFD = \angle ABD = 60^\circ$，又由$B$、$F$、$E$成一直线，可证得$\angle AFE = 60^\circ$，结论得以证明.

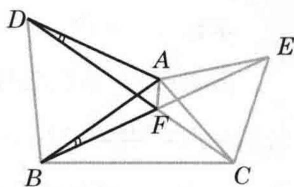


图2-3-105

(2) 由于许多学校在进行全等三角形的教学时，尚未进行圆周角和圆内接四边形的教学，有关圆内接四边形的基本图形的性质尚不能用，因此就要讨论其他的可能性.

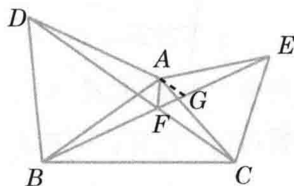


图2-3-106

本题在证明了$\triangle ADC$和$\triangle ABE$是一对旋转型全等三角形以后，由于结论中出现的$AF$可以看作是$\triangle ADC$中的一条线段，因此当$\triangle ADC$绕点$A$旋转$60^\circ$到达$\triangle ABE$的位置时，$AF$也应随$\triangle ADC$的旋转而绕点$A$旋转$60^\circ$到达$\triangle ABE$中的对应位置，如果点$F$落到了点$G$上，则必有$BG = DF$（图2-3-106）.

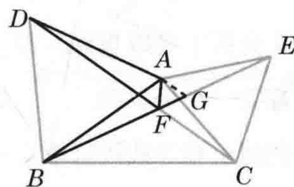


图2-3-107

于是在$BE$上截取$BG = DF$，并联结$AG$，可得$\triangle ADF$和$\triangle ABG$也是一对旋转型全等三角形（图2-3-107），全等的条件是：$AD = AB$，$\angle ADF = \angle ABG$和$DF = BG$，可得$\angle AFD = \angle AGB$，$AF = AG$.

而这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，应用等腰三角形的性质，可得$\angle AFG = \angle AGB$，从而也就可以证明$\angle AFD = \angle AFG$.

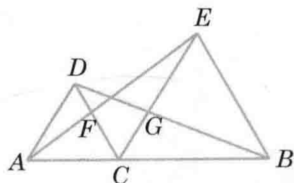


图2-3-108

【例13】已知：$C$是$AB$上的一点，以$AC$为边作等边三角形$ACD$，以$BC$为边向$AD$所在的一侧作等边三角形$BCE$，$AE$、$CD$相交于$F$，$BD$、$CE$相交于$G$.（图2-3-108）

求证：$CF=CG$.

分析：(1) 本题条件中给出$\triangle ACD$、$\triangle BCE$都是等边三角形，且它们具有公共顶点$C$(图 2-3-109)，想到应用旋转型全等三角形进行证明.根据由公共顶点$C$发出的两组相等线段是$CA$、$CD$和$CE$、$CB$两两组成的全等三角形的方法(图 2-3-110)，就可找到这对全等三角形应是$\triangle ACE$和$\triangle DCB$(图 2-3-111).

全等的条件是$CA=CD$，$CE=CB$，它们的夹角都等于旋转角60°加上公共部分$\angle ACE$(也是60°)，即都等于120°.在证明了$\triangle ACE$和$\triangle DCB$全等以后，就可得$\angle EAC=\angle BDC$.

由于本题要证的结论是$CF=CG$，这也是两条具有公共端点相等线段，因此可组成一个等腰三角形(图 2-3-112)，又因为$A$、$C$、$B$成一直线，从而又可得$\angle DCE=60°$，所以$\triangle CFG$是一个等边三角形(这个等边三角形尚未出现，但在分析中可以想到)，而这个等边三角形与等边三角形$ACD$、等边三角形$BCE$都有一个公共顶点$C$，从而出现一对旋转型全等三角形.若由公共顶点$C$发出的两组相等线段选取$CA$、$CD$和$CF$、$CG$(图 2-3-113)，则这对全等三角形就是$\triangle ACF$和$\triangle DCG$(图 2-3-114).

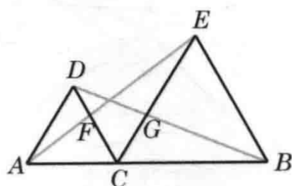


图 2-3-109

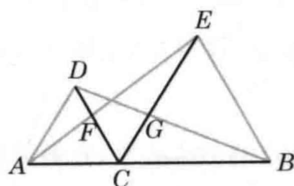


图 2-3-110

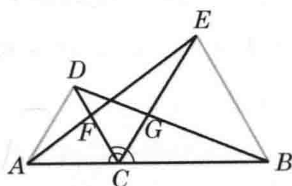


图 2-3-111

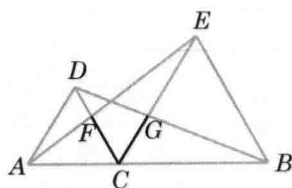


图 2-3-112

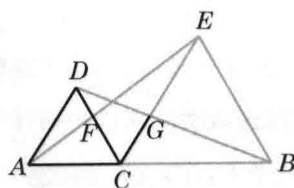


图 2-3-113

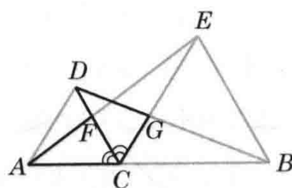


图 2-3-114

在讨论全等条件时，$CF$ 和 $CG$ 相等是结论，不能用，这样就可以取 $AC=DC$，$\angle ACF=\angle DCG=60°$，得到$\angle CAF=\angle CDG$，结论得以证明.

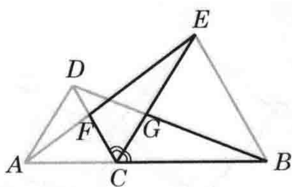


图 2-3-115

若由公共顶点 $C$ 发出的两组相等线段选取 $CE$、$CB$ 和 $CF$、$CG$，则全等三角形就是$\triangle ECF$ 和$\triangle BCG$（图 2-3-115），也可用类似的方法完成分析.

（2）本题要证明 $CF=CG$，而由条件$\triangle ACD$ 和$\triangle BCE$ 都是等边三角形，可得 $\angle ACD=\angle ABE=60°$.

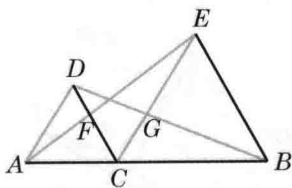


图 2-3-116

由于这两个角是 $CD$、$BE$ 被 $AB$ 所截得到的一组同位角（图 2-3-116），因此可应用与同位角有关的平行线的基本图形的性质进行证明，可得 $CD /\!/ BE$.

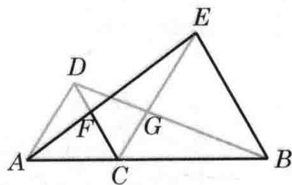


图 2-3-117

这样结论中出现的线段 $CF$ 就成为$\triangle ABE$ 内一条边 $BE$ 的平行线段，于是可以应用由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形进行证明.

由 $CF /\!/ BE$，可得$\triangle ACF \backsim \triangle ABE$（图 2-3-117），$\dfrac{CF}{BE}=\dfrac{AC}{AB}$，$CF=\dfrac{AC \cdot BE}{AB}=\dfrac{AC \cdot BE}{AC+BC}$，又因为 $BE=BC$，所以 $CF=\dfrac{AC \cdot BC}{AC+BC}$.

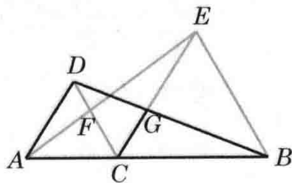


图 2-3-118

同理可得$\triangle BCG \backsim \triangle BAD$（图 2-3-118），$\dfrac{CG}{AD}=\dfrac{BC}{AB}$，也可证得 $CG=\dfrac{AC \cdot BC}{AC+BC}$，从而可以完成分析.

【例 14】已知：$\triangle ABC$ 中，以 $AB$ 为边向$\triangle ABC$ 外作正方形 $ABDE$，以 $AC$ 为边向$\triangle ABC$ 外作正方形 $ACFG$，联结 $BG$、$CE$.（图 2-3-119）

求证：$BG=CE$.

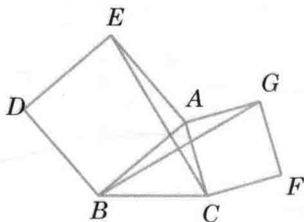


图 2-3-119

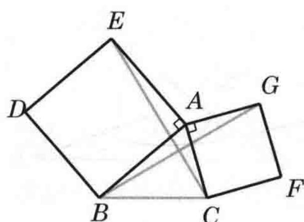


图 2-3-120

分析:本题条件中出现了两个以 $A$ 为公共顶点的正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$(图 2-3-120),从而就可出现一对旋转型全等三角形.

根据由公共顶点 $A$ 发出的两组相等线段 $AE$、$AB$ 和 $AC$、$AG$ 两两组成全等三角形的方法,可以找到这对全等三角形应是 $\triangle ACE$ 和 $\triangle AGB$(图 2-3-121).

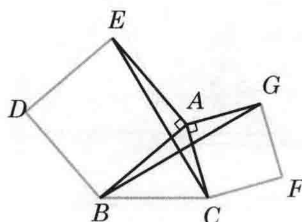


图 2-3-121

全等的条件是 $AE=AB$,$AC=AG$ 和它们的夹角 $\angle EAC$ 和 $\angle BAG$ 都等于旋转角 $90°$ 加上公共部分 $\angle BAC$,在证明了 $\triangle ACE$ 和 $\triangle AGB$ 全等以后,就可得 $CE=BG$,分析得以完成.

【例 15】已知:$\triangle ABC$ 中,以 $AB$ 为边向 $\triangle ABC$ 外作正方形 $ABDE$,以 $AC$ 为边向 $\triangle ABC$ 外作正方形 $ACFG$,以 $AE$、$AG$ 为邻边作平行四边形 $AGHE$,$AD$、$BE$ 相交于 $I$,联结 $HI$、$CI$.(图 2-3-122)

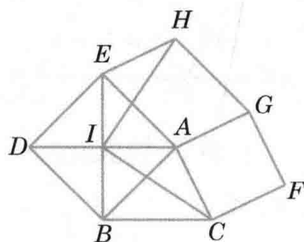


图 2-3-122

求证:$HI=CI$.

分析:本题要证明 $HI$、$CI$ 这两条线段相等,条件给出正方形 $ABDE$ 的对角线 $AD$、$BE$ 相交于 $I$,可得 $EI=AI$,这样就出现了由点 $I$ 发出的两组相等线段,于是可应用旋转型全等三角形来证明.且这两组相等线段应两两交成等角,由于 $EI\perp AI$,因此 $HI$ 也应与 $CI$ 垂直,那么 $HI$ 和 $CI$ 可以组成一个等腰直角三角形,也就是半个正方形.

而 $AD$、$BE$ 将正方形 $ABDE$ 分成四个等腰直角三角形,即半个正方形,它们有一个公共顶点 $I$,且 $I$ 也是 $HI$、$CI$ 组成的等腰直角三角形的直角顶点,于是可以应用旋转型全等三角形进行证明.由于正方形

$ABDE$ 被分成四个等腰直角三角形，所以选择哪一个等腰直角三角形来进行分析，就有四种可能情况.

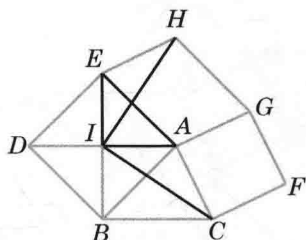


图 2-3-123

(1) 如选取等腰直角三角形 $IEA$，那么等腰直角三角形 $IEA$ 和要证明的等腰直角三角形 $IHC$ 就是两个具有公共顶点 $I$ 的半个正方形(图 2-3-123)，可组成一对旋转型全等三角形.根据由公共顶点 $I$ 发出的两组相等线段 $IE$、$IA$ 和 $IH$、$IC$ 两两组成全等三角形的方法(图 2-3-124)，可以找到这对全等三角形应是$\triangle IEH$ 和$\triangle IAC$(图 2-3-125).

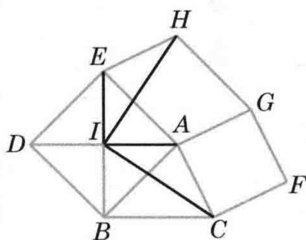


图 2-3-124

由于$\triangle IHC$ 是等腰直角三角形是要证明的结论，不能用，因此就要先证明这两个三角形全等.在$\triangle IEH$ 和$\triangle IAC$ 中，已经有的条件是 $IE=IA$，由四边形 $AGHE$ 是平行四边形，应用平行四边形的性质，可得 $EH=AG$，而由四边形 $ACFG$ 是正方形，又可得 $AG=AC$，所以 $EH=AC$.

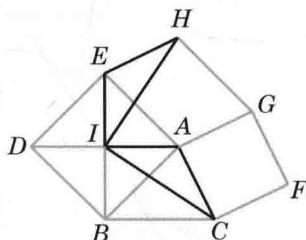


图 2-3-125

证明这两个三角形全等的第三个条件，就应是它们的夹角相等，即$\angle IEH$ 和$\angle IAC$ 相等.因为 $AD$、$BE$ 是正方形 $ABDE$ 的对角线，所以$\angle IEA=\angle IAB=45^\circ$，于是问题就转化为证$\angle AEH=\angle BAC$.由四边形 $AGHE$ 是平行四边形，得$\angle AEH+\angle EAG=180^\circ$，而$\angle BAC+\angle EAG=360^\circ-\angle BAE-\angle CAG=360^\circ-90^\circ-90^\circ=180^\circ$，从而可得$\angle AEH=\angle BAC$.在证明了$\triangle IEH\cong\triangle IAC$ 以后，可得 $HI=CI$，分析得以完成.

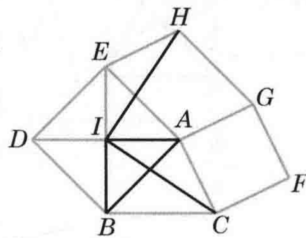


图 2-3-126

(2) 如考虑选取等腰直角三角形 $IAB$，那么等腰直角三角形 $IAB$ 和要证明的等腰直角三角形 $IHC$ 就是两个具有公共顶点 $I$ 的半个正方形(图 2-3-126)，可组成一对旋转型全等三角形.根据由公共顶点

$I$ 发出的两组相等线段 $IA$、$IB$ 和 $IH$、$IC$ 两两组成全等三角形的方法，可以找到这对全等三角形应是 $\triangle IAH$ 和 $\triangle IBC$.

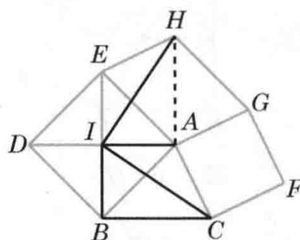


图 2-3-127

但现在图形中 $\triangle IAH$ 尚未出现，于是应先联结 $AH$（图 2-3-127）. 由于 $\triangle IHC$ 是等腰直角三角形是要证明的结论，不能用，因此就要先证明这两个三角形全等.

在 $\triangle IAH$ 和 $\triangle IBC$ 中，已经有的条件是 $IA=IB$，由四边形 $AGHE$ 是平行四边形，应用平行四边形的性质，可得 $EH=AG$，而由四边形 $ACFG$ 是正方形，又可得 $AG=AC$，所以 $EH=AC$.

而由四边形 $ABDE$ 是正方形，可得 $EA=AB$. 又由四边形 $AGHE$ 是平行四边形，可得 $\angle AEH+\angle EAG=180°$，而 $\angle BAC+\angle EAG=360°-\angle BAE-\angle CAG=360°-90°-90°=180°$，从而可得 $\angle AEH=\angle BAC$.

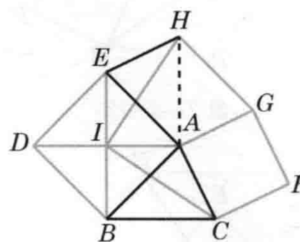


图 2-3-128

于是进一步可以证明 $\triangle EAH$ 和 $\triangle ABC$ 是一对绕正方形 $ABDE$ 的中心 $I$ 旋转 $90°$ 的全等三角形（图 2-3-128），可得 $AH=BC$，$\angle EAH=\angle ABC$. 这样证明 $\triangle IAH$ 和 $\triangle IBC$ 全等的第三个条件，就应是两组相等的对应边的夹角相等，即 $\angle IAH=\angle IBC$.

因为 $AD$、$BE$ 是正方形 $ABDE$ 的对角线，所以 $\angle IAE=\angle IBA=45°$，而已证 $\angle EAH=\angle ABC$，所以 $\angle IAE+\angle EAH=\angle IBA+\angle ABC$，即 $\angle IAH=\angle IBC$，从而可证明 $\triangle IAH\cong\triangle IBC$，可得 $HI=CI$，分析得以完成.

(3) 如考虑选取等腰直角三角形 $IBD$,那么等腰直角三角形 $IBD$ 和要证明的等腰直角三角形 $IHC$ 就是两个具有公共顶点 $I$ 的半个正方形(图 2-3-129),就可组成一对旋转型全等三角形.

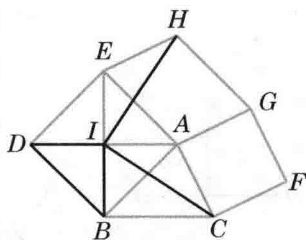


图 2-3-129

根据由公共顶点 $I$ 发出的两组相等线段 $IB$、$ID$ 和 $IH$、$IC$ 两两组成全等三角形的方法,可以找到这对全等三角形应是$\triangle IHB$ 和$\triangle ICD$,但现在图形中$\triangle IHB$ 和$\triangle ICD$ 都尚未出现,应先将这两个三角形添出,也就是联结 $HB$、$CD$.

由于$\triangle IHC$ 是等腰直角三角形是要证明的结论,不能用,因此就要先证明这两个三角形全等.在$\triangle IHB$ 和$\triangle ICD$ 中,已经有的条件是 $IB=ID$,由四边形 $AGHE$ 是平行四边形,可得 $EH=AG$,而由四边形 $ACFG$ 是正方形,又可得 $AG=AC$,所以 $EH=AC$.

由四边形 $ABDE$ 是正方形,可得 $EB=AD$.又由四边形 $AGHE$ 是平行四边形,可得 $EH\parallel AG$,而 $AC\perp AG$,所以 $AC\perp EH$,又因为 $EB\perp AD$,可得$\angle HEB=\angle CAD$.

于是进一步可以证明$\triangle HEB$ 和$\triangle CAD$ 是一对绕正方形 $ABDE$ 的中心 $I$ 旋转 90°的全等三角形(图 2-3-130),可得 $HB=CD$,$\angle EBH=\angle ADC$.这样在$\triangle IHB$ 和$\triangle ICD$ 中,就有 $IB=ID$,$HB=CD$ 和$\angle IBH=\angle IDC$,所以$\triangle IHB\cong\triangle ICD$,可得 $HI=CI$.分析得以完成.

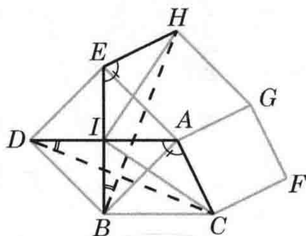


图 2-3-130

(4) 如考虑选取等腰直角三角形 $IDE$,那么等腰直角三角形 $IDE$ 和要证明的等腰直角三角形 $IHC$ 就是两个具有公共顶点 $I$ 的半个正方形,可组成一对

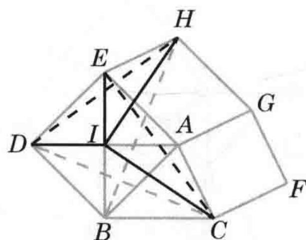


图 2-3-131

旋转型全等三角形.

根据由公共顶点 $I$ 发出的两组相等线段 $ID$、$IE$ 和 $IH$、$IC$ 两两组成全等三角形的方法，可以找到这对全等三角形应是$\triangle IDH$ 和$\triangle IEC$(图 2-3-131)，但现在图形中$\triangle IDH$ 和$\triangle IEC$ 尚未出现，于是应先联结 $DH$、$EC$.

由于$\triangle IHC$ 是等腰直角三角形是要证明的结论，不能用，因此就要先证明这两个三角形全等.

在$\triangle IDH$ 和$\triangle IEC$ 中，已经有的条件是 $ID=IE$，由四边形 $AGHE$ 是平行四边形，可得 $EH=AG$，而由四边形 $ACFG$ 是正方形，又可得 $AG=AC$，所以 $EH=AC$.

因为四边形 $ABDE$ 是正方形，所以 $AE=ED$.由四边形 $AGHE$ 是平行四边形，可得 $EH\parallel AG$，而 $AC\perp AG$，所以 $AC\perp EH$，又由 $AE\perp ED$，可得$\angle HED=\angle CAE$.

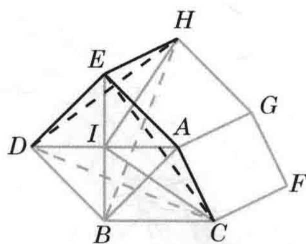


图 2-3-132

于是又进一步可以证明$\triangle HED$ 和$\triangle CAE$ 是一对绕正方形 $ABDE$ 的中心 $I$ 旋转 $90°$的全等三角形(图 2-3-132)，可得 $HD=CE$，$\angle EDH=\angle AEC$.

因为 $AD$、$BE$ 是正方形 $ABDE$ 的对角线，所以$\angle IDE=\angle IEA=45°$，而已证$\angle EDH=\angle AEC$，所以$\angle IDE-\angle EDH=\angle IEA-\angle AEC$，可得$\angle IDH=\angle IEC$，从而可证明$\triangle IDH\cong\triangle IEC$，可得 $HI=CI$.分析得以完成.

如果需要集中进行旋转型全等三角形的教学，可以在《几何王》软件的“智能搜索”功能中，选择左边栏筛选条件中的“基本图形”，鼠标悬停在“全等三角形”，最后点击“旋转型全等三角形”，就可以将所有有

关旋转型全等三角形的习题全部搜索出来.

### 四、绕正方形的中心旋转 90°型

正方形 $ABCD$ 中，过 $C$ 作直线 $EF$，$BG\perp EF$，垂足是 $G$，$DH\perp EF$，垂足是 $H\Rightarrow\angle BCG=\angle CDH\Rightarrow\triangle BCG\cong\triangle CDH\Rightarrow BG=CH, CG=DH$（图 2-3-133）

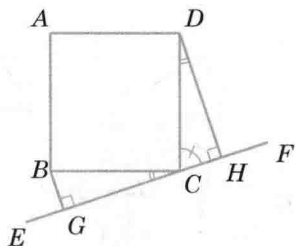


图 2-3-133

当几何问题中，出现了过正方形的一个顶点向过它的相邻顶点的一条直线所作的垂线时，就可以应用或添加绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明，添加的方法是过它的对角顶点向同一条直线作垂线.

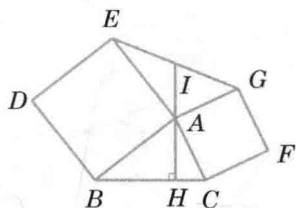


图 2-3-134

【例 16】已知：$\triangle ABC$ 中，以 $AB$ 为边向 $\triangle ABC$ 外作正方形 $ABDE$，以 $AC$ 为边向 $\triangle ABC$ 外作正方形 $ACFG$，$AH\perp BC$，垂足是 $H$，延长 $HA$ 交 $EG$ 于 $I$.（图 2-3-134）

求证：$EI=GI$.

分析：(1) 本题条件中出现的 $BH\perp AH$，是过正方形 $ABDE$ 的顶点 $B$ 向过它的相邻顶点 $A$ 的一条直线 $HI$ 所作的垂线（图 2-3-135），从而可添加绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明.

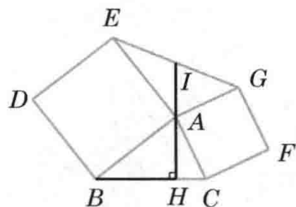


图 2-3-135

添加的方法是过 $B$ 的对角顶点 $E$ 向同一条直线 $HI$ 作垂线，于是过 $E$ 作 $EJ\perp HI$ 交 $HI$ 的延长线于 $J$（图 2-3-136），可得 $\triangle ABH$ 和 $\triangle EAJ$ 是一对绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形，全等的条件有 $AB=EA$，$\angle AHB=\angle EJA=90°$，还缺少一个条件.

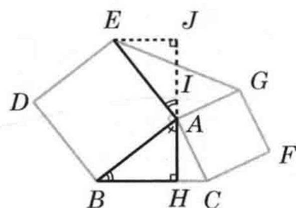


图 2-3-136

由$\angle AHB=90^\circ$，可得$\angle ABH+\angle BAH=90^\circ$，而由$H$、$A$、$J$成一直线和$\angle EAB=90^\circ$，又可得$\angle EAJ+\angle BAH=180^\circ-\angle EAB=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，所以$\angle ABH=\angle EAJ$，从而可证明$\triangle ABH\cong\triangle EAJ$，也就可证明$AH=EJ$.

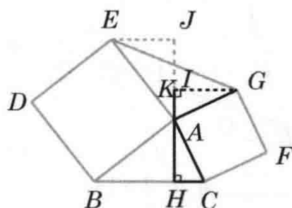


图 2-3-137

根据同样的方法，对于正方形$ACFG$中出现的过顶点$C$向过它的相邻顶点$A$的一条直线$HI$所作的垂线，也可添加绕正方形的中心旋转$90^\circ$的全等三角形进行证明，于是过$C$的对角顶点$G$作$HI$的垂线，即过$G$作$GK\perp HI$交$HI$于$K$(图 2-3-137)，可以证明$\triangle ACH\cong\triangle GAK$，$GK=AH$，所以$GK=EJ$.

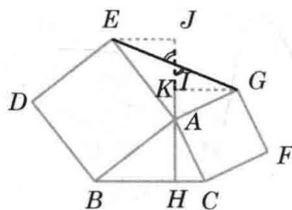


图 2-3-138

现在要证明的结论是$EI=GI$，而$EG$、$AJ$在$I$点相交，那么这两条要证明相等的线段$EI$、$GI$位于一组对顶角$\angle EIJ$和$\angle GIK$的两边而且成一直线(图 2-3-138)，于是可应用中心对称型全等三角形进行证明.

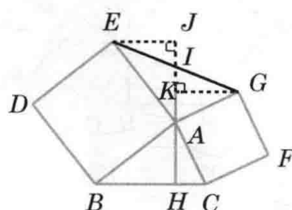


图 2-3-139

根据由过两个端点的平行线与过中点的直线相交组成全等三角形的方法，可以找到这对全等三角形是$\triangle EIJ$和$\triangle GIK$(图 2-3-139)，全等的条件是$EJ=GK$，$\angle EJI=\angle GKI=90^\circ$，$\angle EIJ=\angle GIK$，所以$\triangle EIJ\cong\triangle GIK$，也就有$EI=GI$.

(2) 本题在添加绕正方形的中心旋转$90^\circ$的全等三角形进行证明时，由于$AH$是$\triangle ABC$的一条高，因此当$\triangle ABH$绕正方形的中心旋转$90^\circ$时，$\triangle ABC$也会同时绕正方形的中心旋转$90^\circ$，那么$AC$就落在与$AC$垂直的$EJ$的位置上，因为$GA\perp AC$，所以$EJ\parallel GA$.这样具体的作图方法就是过$E$作$EJ\parallel AG$交

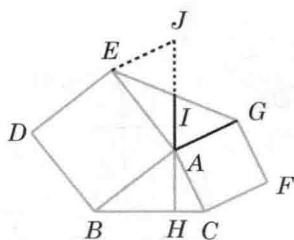


图 2-3-140

$HI$ 的延长线于 $J$(图 2-3-140),于是就可找到这对全等三角形应是$\triangle ABC$ 和$\triangle EAJ$(图 2-3-141),全等的条件有 $AB=EA$,所以还要证两个性质.由$\angle AHB=90^\circ$,可得$\angle ABH+\angle BAH=90^\circ$,由$\angle EAB=90^\circ$,$H$、$A$、$J$ 成一直线,可得$\angle EAJ+\angle BAH=180^\circ-\angle EAB=180^\circ-90^\circ=90^\circ$,所以$\angle ABH=\angle EAJ$.

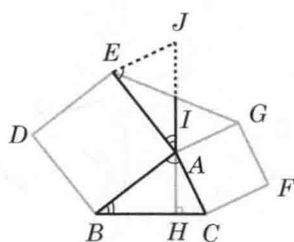


图 2-3-141

又因为$\angle EAB=\angle GAC=90^\circ$,所以$\angle EAG+\angle BAC=360^\circ-\angle EAB-\angle GAC=360^\circ-90^\circ-90^\circ=180^\circ$,而由 $EJ\parallel AG$,又可得$\angle EAG+\angle AEJ=180^\circ$,可推得$\angle BAC=\angle AEJ$,所以$\triangle ABC\cong\triangle EAJ$,可得 $AC=EJ$.

而已知四边形 $ACFG$ 是正方形,$AC=AG$,所以 $EJ=AG$,因而 $EJ$、$AG$ 是两条平行且相等的线段,从而可应用中心对称型全等三角形进行证明.

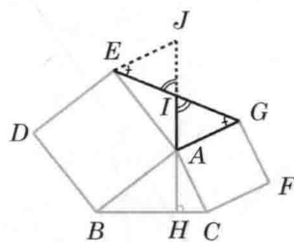


图 2-3-142

根据将它们的四个端点两两联结得到中心对称型全等三角形的方法,可得$\triangle AGI$ 和$\triangle JEI$ 是全等三角形(图 2-3-142),全等的条件是 $AG=EJ$,$\angle AIG=\angle JIE$,$\angle AGI=\angle JEI$,分析得以完成.

(3) 本题的实质是添加一对绕正方形的中心旋转 $90^\circ$的全等三角形和一对中心对称型全等三角形来进行证明,所以分析也可以直接从添加中心对称型全等三角形开始,添加的方法是过 $EG$ 的两个端点作平行线,于是首先选取过端点的线段为平行方向线段.

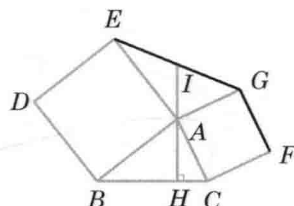


图 2-3-143

如选取过端点 $G$ 的线段 $GF$ 为平行方向线段,那么应过另一个端点 $E$ 作平行线,也就是过 $E$ 作 $EJ\parallel$

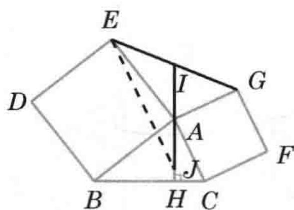


图 2-3-144

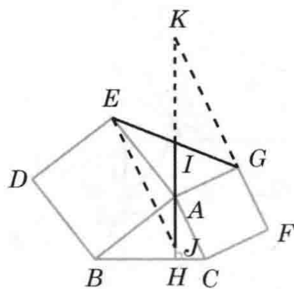


图 2-3-145

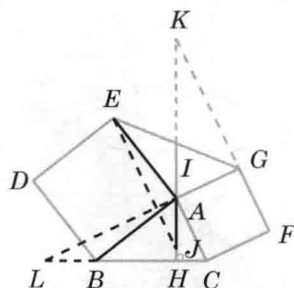


图 2-3-146

$GF$ 交 $HI$ 于 $J$（图 2-3-144）.由于中心对称型全等三角形是由过两个端点的一组平行线与过中点的直线相交得到的，而图形中平行线中的 $GF$ 尚未与过中点 $I$ 的直线 $HI$ 相交，因此应先将它们延长到相交，即延长 $FG$ 交 $HI$ 的延长线于 $K$（图 2-3-145）.于是可得$\triangle EJI$ 和$\triangle GKI$ 是一对中心对称型全等三角形，全等的条件有$\angle EIJ=\angle GIK$，$\angle JEI=\angle KGI$，所以还要证明一组边对应相等.

因为已经作出的是 $EJ \parallel GF$，而已知 $GF \perp AG$，所以 $EJ \perp AG$.

这样就出现了过正方形 $ABDE$ 的顶点 $E$ 向过它的相邻顶点 $A$ 的一条直线 $AG$ 所作的垂线，可添加绕正方形的中心旋转 $90^\circ$的全等三角形进行证明.由于过 $E$ 的对角顶点 $B$ 已经有 $AJ$ 的垂线 $BH$，因此$\triangle AEJ$ 绕正方形的中心旋转 $90^\circ$后，$AE$ 落在 $BA$ 上，$AJ$ 落在 $HB$ 的延长线上，$EJ$ 落在 $GA$ 的延长线上.于是延长 $HB$、$GA$ 相交于 $L$，可得$\triangle AEJ$ 和$\triangle BAL$ 是一对绕正方形的中心旋转 $90^\circ$的全等三角形（图 2-3-146），全等的条件是 $AE=BA$，$\angle AEJ=\angle BAL$，$\angle AJE=\angle BLA$，从而可证明 $EJ=AL$.

由于出现了与 $EJ$ 有关的性质，因此证明$\triangle EJI$ 和$\triangle GKI$ 全等的第三个条件应是 $EJ=GK$，也就转化为证 $AL=GK$.

由条件$\angle LAC=\angle KGA=90^\circ$，$LA\perp KG$，出现的还是过正方形的顶点 $A$ 向过它的相邻顶点 $G$ 的直线 $GK$ 所作的垂线，可以应用绕正方形的中心旋转 $90^\circ$的全等三角形进行证明，于是可找到以 $AL$、$GK$ 为直角边的这对全等三角形应是$\triangle LCA$ 和$\triangle KAG$

(图 2-3-147),全等的条件是 $AC=GA$,$\angle LAC=\angle KGA=90^{\circ}$,以及$\angle ALC=\angle EJA=\angle GKA$,所以 $AL=GK$ 可以证明,从而完成分析.

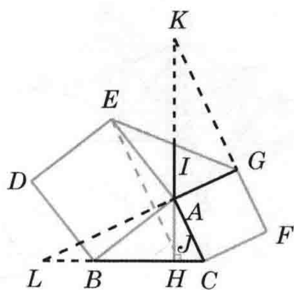


图 2-3-147

(4) 本题的分析在过 $E$ 作 $EJ /\!/ GF$ 交 $HI$ 于 $J$ 后,问题转化为证 $EJ=GK$.由 $GK /\!/ EJ$,过这一组平行线段中 $GK$ 两端的直线可以相交在 $I$ 点,组成中心对称型全等三角形,也可以相交在 $A$ 点,组成平行线型相似三角形.于是延长 $GA$ 交 $EJ$ 于 $L$(图 2-3-148),可得$\triangle KAG$ 和$\triangle JAL$ 相似,所以$\dfrac{AG}{AL}=\dfrac{KG}{JL}$.

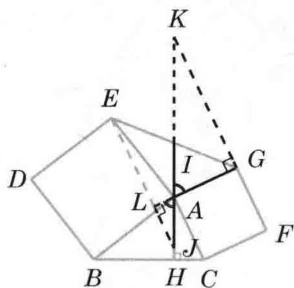


图 2-3-148

现在要证明 $EJ=GK$,就要证明 $EJ$ 也满足上述比例关系,也就是要证$\dfrac{AG}{AL}=\dfrac{JE}{JL}$.对这一要证明的比例关系进行描图,可以发现 $JE$ 和 $JL$ 这一组相比线段现在重叠在一直线上,可添加平行线型的相似三角形进行证明.添加的方法是过端点和内分点作平行线.

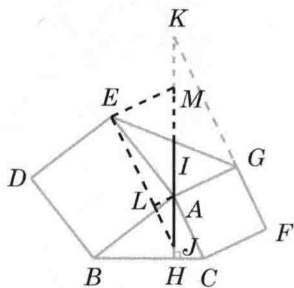


图 2-3-149

如取过内分点 $L$ 的线段 $LA$ 为平行方向线段,那么应过端点 $E$ 作平行线.于是过 $E$ 作 $EM /\!/ LA$ 交 $JK$ 于$M$(图 2-3-149),就可得$\triangle JLA$ 和$\triangle JEM$ 相似,$\dfrac{JE}{JL}=\dfrac{EM}{LA}$,所以问题转化为证明 $AG=EM$.而由$\triangle ABC$ 和$\triangle EAM$ 是一对绕正方形的中心旋转 $90^{\circ}$的全等三角形,分析得以完成.

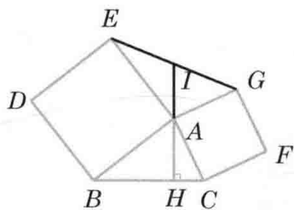


图 2-3-150

(5) 若平行方向线段取在过中点 $I$ 的线段 $IA$(图 2-3-150),则过两个端点 $E$、$G$ 所作的 $IA$ 的平行线与 $IA$ 不会相交,这时中心对称型全等三角形就不再出现,问题转化为三角形中位线的基本图形的应

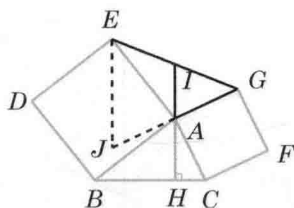


图 2-3-151

用问题，也就是过 E(或 G)作 $EJ \parallel IA$ 交 $GA$ 的延长线于 $J$(图 2-3-151)，问题转化为证明 $GA=AJ$.

由四边形 $ACFG$ 是正方形，$GA=AC$，问题又转化为证 $AJ=AC$.这是两条具有公共端点 $A$ 的相等线段，且它们互相垂直，所以它们可以组成一个等腰直角三角形，也就是半个正方形.

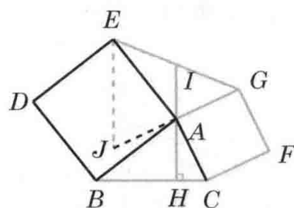


图 2-3-152

由于条件中给出四边形 $ABDE$ 是正方形，这样就出现了两个具有公共顶点 $A$ 的正方形(图 2-3-152)，因此可应用旋转型全等三角形进行证明.

根据由公共顶点 $A$ 发出的两组相等线段就是 $AE$、$AB$ 和 $AJ$、$AC$ 两两组成的全等三角形的方法，可找到这对全等三角形应是$\triangle AEJ$ 和$\triangle ABC$(图 2-3-153)，全等的条件已经有 $AE=AB$，所以还缺少两个条件.

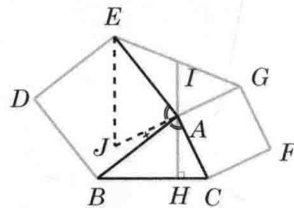


图 2-3-153

由条件 $\angle EAB=\angle EAJ+\angle BAJ=90^\circ$，得 $\angle EAJ=90^\circ-\angle BAJ$，因为 $\angle JAC=\angle BAC+\angle BAJ=90^\circ$，所以$\angle BAC=90^\circ-\angle BAJ$，从而可得 $\angle EAJ=\angle BAC$.

因为 $H$、$A$、$I$ 成一直线，所以$\angle EAI+\angle BAH=180^\circ-\angle EAB=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，又由 $AH\perp BC$，$\angle AHB=90^\circ$，可得$\angle ABH+\angle BAH=90^\circ$，所以 $\angle EAI=\angle ABH$.

而由 $EJ \parallel IA$，可得$\angle AEJ=\angle EAI$，所以 $\angle AEJ=\angle ABC$，从而可得$\triangle AEJ\cong\triangle ABC$，所以分析得以完成.

(6) 若平行方向线段取过中点 $I$ 的线段 $IA$，则过两个端点 $E$、$G$ 所作的 $IA$ 的平行线与 $IA$ 就不会

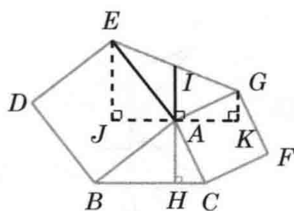


图 2-3-154

相交，中心对称型全等三角形不再出现，这时这一组平行线与过 $A$ 的任何一条直线相交，都会出现梯形的中位线，于是可选取其中一条特殊的方向，也就是与 $HI$ 垂直的方向的直线与这一组平行线相交，即过 $E$、$G$ 作 $EJ \parallel GK \parallel IA$，过 $A$ 作 $JK \perp HI$ 分别交 $EJ$、$GK$ 于 $J$、$K$（图 2-3-154），可得 $\angle EJA = \angle IAK = \angle GKA = 90^\circ$.

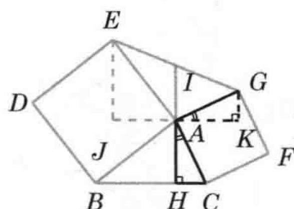


图 2-3-155

这样要证 $EI = GI$，就转化为证 $JA = KA$.

由四边形 $ACFG$ 是正方形，得 $GA \perp AC$，$GA = AC$，所以 $\angle GAC$ 和 $\angle KAH$ 是两个以 $A$ 为公共顶点的直角，于是得 $\angle GAK = \angle CAH$，而由 $\angle AKG = \angle AHC = 90^\circ$，所以 $\triangle AKG$ 和 $\triangle AHC$ 是一对旋转型全等三角形（图 2-3-155），从而可得 $AK = AH$.

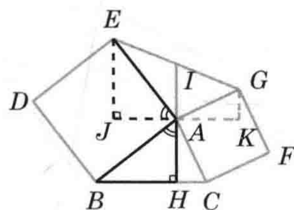


图 2-3-156

根据同样的道理，又可以证明 $\triangle AJE$ 和 $\triangle AHB$ 是一对旋转型全等三角形（图 2-3-156），$AJ = AH$，所以 $JA = KA$，可以完成分析.

（7）本题条件中给出了四边形 $ABDE$ 是正方形，且 $AH \perp BC$，$AH$ 是过正方形 $ABDE$ 的顶点 $A$ 向过它的相邻顶点 $B$ 的直线 $BC$ 所作的垂线，可添加绕正方形的中心旋转 $90^\circ$ 的全等三角形进行证明，这时绕正方形的中心旋转 $90^\circ$ 的三角形，既可以选取 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEG$，也可以选取 $\triangle AEI$ 或 $\triangle AGI$.

若选取将 $\triangle AEI$ 绕正方形 $ABDE$ 的中心旋转 $90^\circ$，则 $\triangle AEI$ 在绕正方形 $ABDE$ 的中心旋转 $90^\circ$ 后，由于 $EA \perp AB$，因此 $EA$ 就落在 $AB$ 上，又由 $IH \perp BC$，$IA$ 就落在 $BH$ 上，这样 $EI$ 也就落在过 $A$ 且与 $EI$ 垂直的位置上，而 $EI$ 绕正方形 $ABDE$ 的中心旋

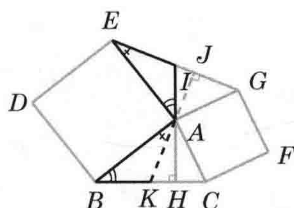


图 2-3-157

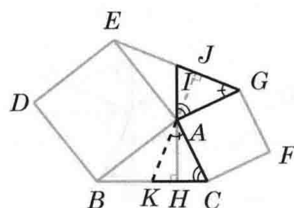


图 2-3-158

转 90°后落下来的位置图形中尚未出现，于是应先将它添出，即过 $A$ 作 $JK\perp EG$，交 $EG$ 于 $J$，交 $BC$ 于 $K$（图 2-3-157）.

于是由 $EA=AB$，$\angle ABK=\angle EAI$，$\angle BAK=\angle AEI$，可得$\triangle ABK$ 和$\triangle EAI$ 是一对绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形，所以 $AK=EI$.

根据同样的道理，可以证明$\triangle ACK$ 和$\triangle GAI$ 也是一对绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形（图 2-3-158），所以 $AK=GI$，从而可以证明 $EI=GI$.

如果需要集中进行这种添线方法的教学，可以在《几何王》软件的“智能搜索”功能中，选择左边栏筛选条件中的“基本图形”，鼠标依次悬停在“全等三角形”→“旋转型全等三角形”，最后点击“全等三角形三(6)”图标，就可以将所有应用这种添线方法的习题全部搜索出来.

# 第四节　相似三角形

## 一、平行线型

(一) 三角形内的平行线型

$\triangle ABC$ 中，$D$ 是 $AB$ 上的一点，$E$ 是 $AC$ 上的一点，$DE // BC \Rightarrow \triangle ADE \backsim \triangle ABC$，$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$（图 2-4-1）

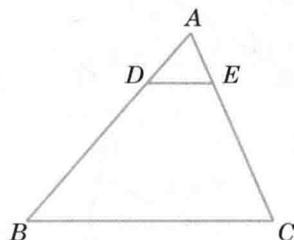


图 2-4-1

上述比例关系可以分别写成三个比例式，对这三个比例式进行描图，可以发现至少有一组相比线段是重叠在一直线上，相比两线段重叠在一直线上是平行线型相似三角形最重要的位置特征.

平行线型相似三角形应用的第一种情况是出现了三角形内一条边的平行线段，这时可直接应用平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明，如果这条平行线段还没有和三角形的边相交，那么就延长到相交.

平行线型相似三角形应用的第二种情况是出现了相比两线段重叠在一直线上，这时可添加平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是过端点和内分点作平行线.

平行线型相似三角形应用的第三种情况是出现了两组相比两线段都重叠在一直线上，且两两联结四个端点的线段的延长线相交于公共的端点，这时可添加平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是将端点和端点、内分点和内分点分别联结，这两条连线一定平行，并组成平行线型相似三角形.

平行线型相似三角形应用的第四种情况是出现了相比两线段是平行线段，

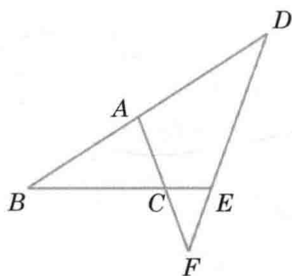


图 2-4-2

这时可添加平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是将两条平行线段的四个端点两两联结，并延长到相交，组成平行线型相似三角形.

【例 1】已知：$\triangle ABC$ 中，延长 $BA$ 到 $D$，延长 $BC$ 到 $E$，联结 $DE$，$\dfrac{BA}{BD}=\dfrac{AC}{DE}$，$AC$、$DE$ 的延长线相交于 $F$.（图 2-4-2）

求证：$FC=FE$.

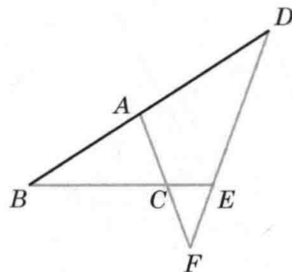


图 2-4-3

分析：本题的条件中给出的$\dfrac{BA}{BD}=\dfrac{AC}{DE}$是线段之间的比例关系，首先应进行描图，搞清楚比例线段的位置关系.

经过描图可以发现，$BA$ 和 $BD$ 这两条相比线段现在重叠在一直线上（图 2-4-3），可应用或添加平行线型相似三角形进行证明.添加的方法是过端点和内分点作平行线，于是首先选择过端点或内分点的线段为平行方向线段.现在重叠的相比线段的两个端点是 $B$、$D$，内分点是 $A$，图形中过 $B$、$D$、$A$ 的线段分别是 $BC$、$AC$、$DE$，所以选取平行方向线段就出现了三种情况.

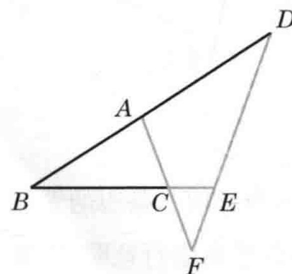


图 2-4-4

（1）若选取 $BC$ 为平行方向线段（图 2-4-4），则既平行线可过内分点 $A$ 作，也可以过另一个端点 $D$ 作.

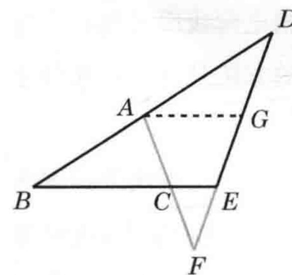


图 2-4-5

① 若首先选取过内分点 $A$ 作平行线，则过 $A$ 作 $AG /\!/ BC$ 交 $DE$ 于 $G$（图 2-4-5），可得$\dfrac{BA}{BD}=\dfrac{EG}{ED}$，而已知$\dfrac{BA}{BD}=\dfrac{AC}{DE}$，从而可推得 $AC=GE$.

而在作出 $AG /\!/ BC$ 后，又出现了 $CE$ 是$\triangle FAG$

内一条边 $AG$ 的平行线段(图 2－4－6)，应用由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明，从而可得$\frac{FC}{AC}=\frac{FE}{GE}$，所以 $FC=FE$ 就得以证明.

② 若选取过另一个端点 $D$ 作平行线，则要作到与过内分点 $A$ 的直线相交，这时就构成由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形.

于是过 $D$ 作 $DG /\!/ CB$ 交 $CA$ 的延长线于 $G$(图 2－4－7)，可得$\triangle ABC \backsim \triangle ADG$，$\frac{BA}{BD}=\frac{CA}{CG}$，而已知$\frac{BA}{BD}=\frac{AC}{DE}$，可推得 $DE=GC$.

而在作出 $DG /\!/ CB$ 后，出现了 $CE$ 是$\triangle FGD$ 内一条边 $GD$ 的平行线段(图 2－4－8)，可应用由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明，从而又可得$\frac{FC}{CG}=\frac{FE}{ED}$，$FC=FE$ 就得以证明.

(2) 若选取过内分点 $A$ 的线段 $AC$ 为平行方向线段(图 2－4－9)，则可以过端点 $D$ 作平行线，也就是过 $D$ 作 $DG /\!/ AC$ 交 $BE$ 的延长线于 $G$(图 2－4－10).

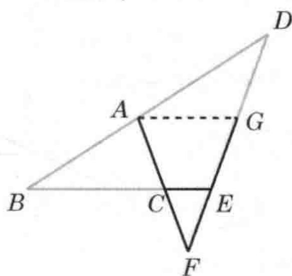


图 2－4－6

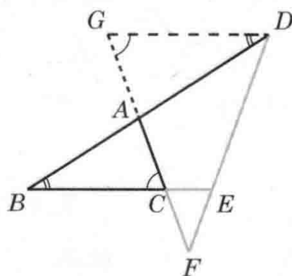


图 2－4－7

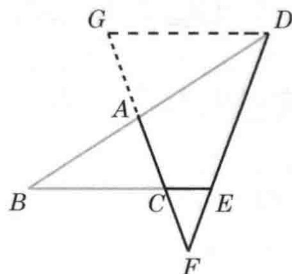


图 2－4－8

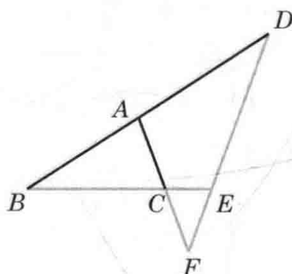


图 2－4－9

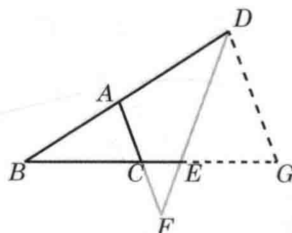


图 2－4－10

可得$\triangle ABC$和$\triangle DBG$相似，所以$\frac{BA}{BD}=\frac{AC}{DG}$，而已知$\frac{BA}{BD}=\frac{AC}{DE}$，从而可推得$DE=DG$.

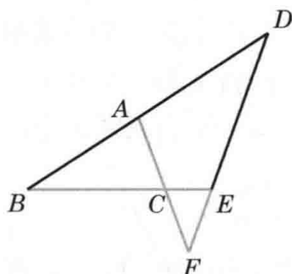


图 2-4-11

而在作出$DG\parallel AC$后，又出现了$DG$是$\triangle FCE$外一条边$CF$的平行线段，可应用由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明，可得$\triangle FCE\backsim\triangle DGE$.由于$DE=DG$，所以$FC=FE$就得以证明.

(3) 若选取过端点$D$的线段$DE$为平行方向线段(图 2-4-11)，则可以过内分点$A$作平行线.即过$A$作$AG\parallel DE$交$BC$于$G$(图 2-4-12)，可得$\triangle ABG$和$\triangle DBE$是一对由三角形内一条边的平行线得到的平行线型相似三角形，所以$\frac{BA}{BD}=\frac{AG}{DE}$，而已知$\frac{BA}{BD}=\frac{AC}{DE}$，从而可推得$AC=AG$.

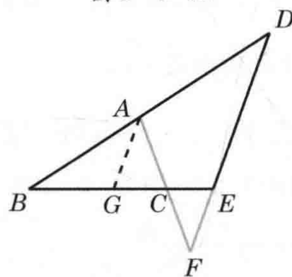


图 2-4-12

而在作出$AG\parallel DE$后，出现了$AG$是$\triangle FCE$外一条边$EF$的平行线段，可应用由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明，从而又可得$\triangle FCE\backsim\triangle ACG$(图 2-4-13)，又因为$AC=AG$，所以$FC=FE$就得以证明.

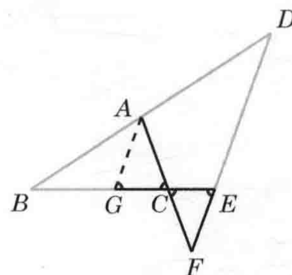


图 2-4-13

【例 2】已知：$\triangle ABC$中，$AD$是$\angle BAC$的平分线.(图 2-4-14)

求证：$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$.

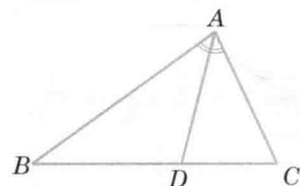


图 2-4-14

分析：本题要证明的结论$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$，是线段之间

的比例关系，首先应进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

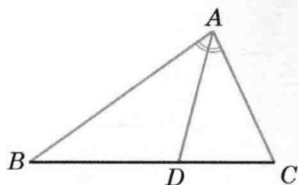


图 2-4-15

经过描图可以发现，$BD$ 和 $CD$ 这两条相比线段现在重叠在一直线上(图 2-4-15)，可应用或添加平行线型相似三角形进行证明.

添加的方法是过端点和内分点作平行线，于是选取过端点或内分点的线段为平行方向线段.

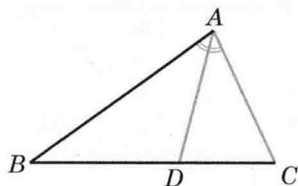


图 2-4-16

现在重叠的相比线段的两个端点是 $B$、$C$，内分点是 $D$，图形中过 $B$、$C$、$D$ 的线段分别是 $BA$、$CA$、$DA$，所以选取平行方向线段就出现了三种情况.

(1) 若取 $BA$ 为平行方向线段(图 2-4-16)，则平行线既可过内分点 $D$ 作，也可以过另一个端点 $C$ 作.

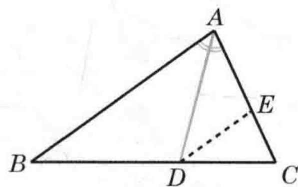


图 2-4-17

① 若首先选取过内分点 $D$ 作平行线，则过 $D$ 作 $DE /\!/ BA$ 交 $AC$ 于 $E$(图 2-4-17)，可得$\triangle CDE$ 和 $\triangle CBA$ 是由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，所以$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AE}{CE}$.

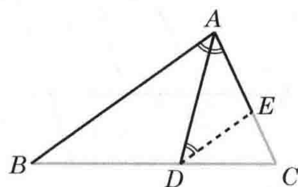


图 2-4-18

由于条件中还给出 $AD$ 是角平分线，而 $DE /\!/ BA$，就出现了角平分线和平行线的组合关系，因此必定可以构成一个等腰三角形的基本图形(图 2-4-18).由于 $DE$ 是角的一边 $BA$ 的平行线，因此它应该和角的另一边以及角平分线相交构成等腰三角形，于是由 $\angle BAD=\angle CAD$，$\angle BAD=\angle EDA$，可得 $\angle CAD=\angle EDA$，所以 $EA=ED$.

所以$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{ED}{EC}$，而要证明的结论是$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AE}{AC}$，问题转化为证$\dfrac{ED}{EC}=\dfrac{AB}{AC}$.

这是一个新的比例关系式，应先进行描图，搞清

楚比例线段之间的位置关系.经过描图可以发现,$EC$和$AC$这两条相比线段现在重叠在一直线上,可应用平行线型相似三角形进行证明,由于已经作出$DE\parallel AB$,且已经证明$\triangle CDE\backsim\triangle CBA$,就可得$\frac{ED}{EC}=\frac{AB}{AC}$,所以$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$得以证明.

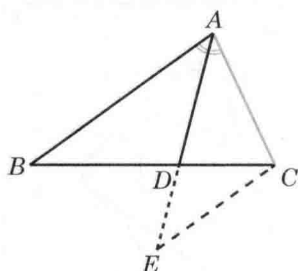


图 2-4-19

② 若取$BA$为平行方向线段后,选取过端点$C$作平行线,则过$C$作$CE\parallel AB$交$AD$的延长线于$E$(图 2-4-19),可得$\triangle CDE$和$\triangle BDA$是由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形,所以$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{EC}$.

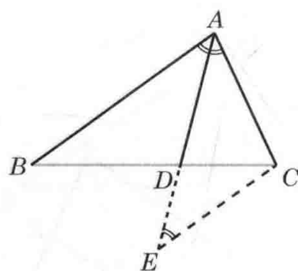


图 2-4-20

由于条件中还给出$AD$是角平分线,而$CE\parallel AB$,出现了角平分线和平行线的组合关系,因此必定可以构成一个等腰三角形的基本图形(图 2-4-20).由于$CE$是角的一边$BA$的平行线,因此它应该和角的另一边以及角平分线相交构成等腰三角形,于是由$\angle BAD=\angle CAD$,$\angle BAD=\angle CEA$,可得$\angle CAE=\angle CEA$,所以$AC=EC$,从而可证明$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$.

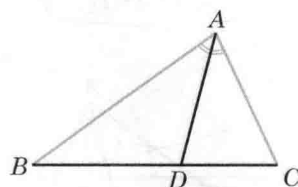


图 2-4-21

(2) 若取$DA$为平行方向线段(图 2-4-21),则可过端点$C$或$B$作平行线,于是过$C$作$CE\parallel DA$交$BA$的延长线于$E$(图 2-4-22),则$\triangle BAD$和$\triangle BEC$是由三角形内一条边的平行线得到的平行线型相似三角形,所以$\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{EA}$.

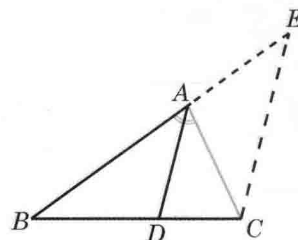


图 2-4-22

由于条件中还给出$AD$是角平分线,而$CE\parallel DA$,出现了角平分线和平行线的组合关系,因此必定

可以构成一个等腰三角形的基本图形(图 2－4－23).由于 $CE$ 是角平分线的平行线,因此它应该和角的一边以及另一边的反向延长线相交构成等腰三角形.

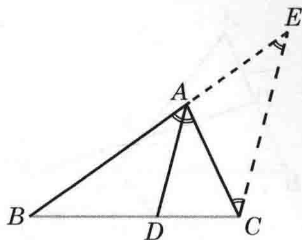


图 2－4－23

于是由 $\angle BAD=\angle CAD$,$\angle BAD=\angle AEC$,$\angle CAD=\angle ACE$,可得$\angle ACE=\angle AEC$,$AE=AC$,从而可证明$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$.

【例 3】已知:$\triangle ABC$ 中,$D$ 是 $AB$ 上的一点,延长 $BC$ 到 $E$,使 $AD=CE$,联结 $DE$,$DE$、$AC$ 相交于 $F$.(图 2－4－24)

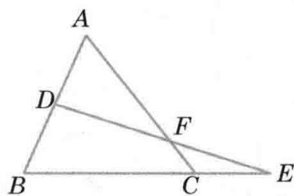


图 2－4－24

求证:$\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{AB}{BC}$.

分析:本题要证明的结论$\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{AB}{BC}$是线段之间的比例关系,首先应进行描图,搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现 $EF$ 和 $DF$ 这两条相比线段现在重叠在一直线上(图 2－4－25),可应用或添加平行线型相似三角形进行证明,添加的方法是过端点和内分点作平行线.

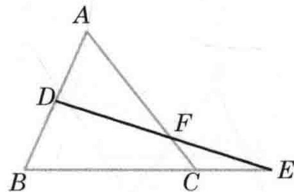


图 2－4－25

于是首先要选择过端点或内分点的线段为平行方向线段.现在重叠的相比线段的两个端点是 $D$、$E$,内分点是 $F$,图形中过 $D$、$E$、$F$ 的线段分别是 $DA$(或 $DB$)、$EC$(或 $EB$)、$FC$(或 $FA$),所以选取平行方向线段就出现了三种情况.由于 $AD$、$EC$ 是与条件有关的性质,所以可先行讨论.

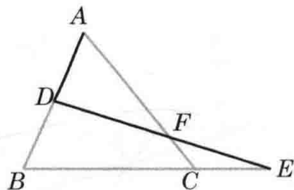


图 2－4－26

(1) 若取 $AD$ 为平行方向线段(图 2－4－26),则平行线既可以过另一个端点 $E$ 作,也可以过内分点

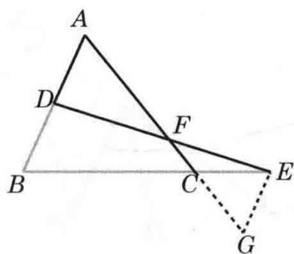


图 2-4-27

F 作.

若首先选取过另一个端点 $E$ 作平行线，则过 $E$ 作 $EG /\!/ AD$ 交 $AC$ 的延长线于 $G$(图 2-4-27)，可得 $\triangle AFD$ 和 $\triangle GFE$ 是由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，可得 $\frac{EF}{DF}=\frac{GE}{AD}$. 又因为条件给出 $AD=CE$，所以 $\frac{EF}{DF}=\frac{GE}{CE}$.

现在要证的结论是 $\frac{EF}{DF}=\frac{AB}{BC}$，于是问题转化为证 $\frac{GE}{EC}=\frac{AB}{BC}$.

这是一组新的线段之间的比例关系，首先应进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.经过描图可以发现，$EC$ 和 $BC$ 这两条相比线段现在重叠在一直线上，可应用或添加平行线型相似三角形进行证明.

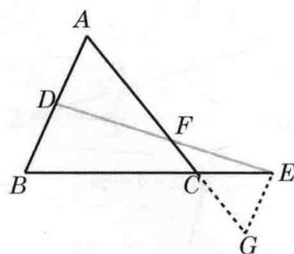


图 2-4-28

由于过两个端点 $B$、$E$ 的平行线段 $BA$、$EG$ 的四个端点两两的连线在内分点 $C$ 相交，因此 $\triangle ABC$ 和 $\triangle GEC$ 是由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形(图 2-4-28)，从而可以证明 $\frac{GE}{EC}=\frac{AB}{BC}$.

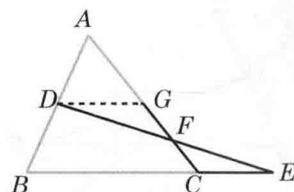


图 2-4-29

(2) 若选取过端点 $E$ 的线段 $EC$ 为平行方向线段，则可过另一个端点 $D$ 作平行线，即过 $D$ 作 $DG /\!/ CE$ 交 $AC$ 于 $G$(图 2-4-29)，那么 $\triangle DGF$ 和 $\triangle ECF$ 是由三角形外一条边的平行线得到的平行线型相似三角形，所以 $\frac{FE}{FD}=\frac{EC}{DG}$. 而已知 $AD=CE$，所以 $\frac{FE}{FD}$

$=\dfrac{AD}{DG}$.

而要证明的结论是$\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{AB}{BC}$，所以问题转化为证$\dfrac{AD}{DG}=\dfrac{AB}{BC}$.

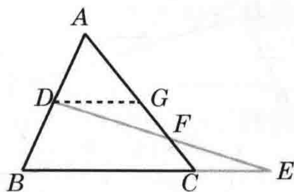


图 2-4-30

这是一个新的比例关系式，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.经过描图可以发现，$AD$、$AB$ 这两条相比线段现在重叠在一直线上，可应用平行线型相似三角形进行证明(图 2-4-30).

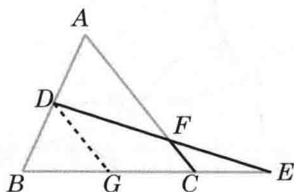


图 2-4-31

由于 $DG\parallel BC$，可得$\triangle ADG$ 和$\triangle ABC$ 是由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，因此$\dfrac{AD}{DG}=\dfrac{AB}{BC}$，从而可以证明$\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{AB}{BC}$.

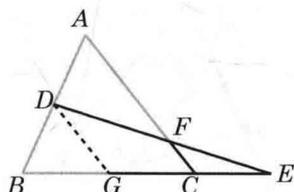


图 2-4-32

(3) ① 若选取过内分点 $F$ 的线段 $FC$ 为平行方向线段(图 2-4-31)，则可过端点 $D$ 作平行线，即过 $D$ 作 $DG\parallel FC$ 交 $BC$ 于 $G$(图 2-4-32)，可得$\triangle EFC$ 和$\triangle EDG$ 是由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，所以$\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{EC}{CG}$，而已知 $AD=CE$，就可得$\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{AD}{CG}$.

而要证明的结论是$\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{AB}{BC}$，所以问题转化为证$\dfrac{AD}{CG}=\dfrac{AB}{CB}$，这是一个新的比例关系式，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

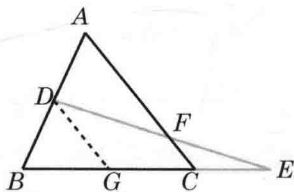


图 2-4-33

经过描图可以发现，$AD$、$AB$ 和 $CG$、$CB$ 这两组相比线段重叠在一直线上，可应用平行线型相似三角形进行证明(图 2-4-33).因此 $DG\parallel AC$，所以$\dfrac{AD}{CG}=$

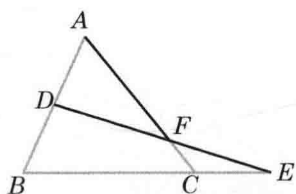


图 2－4－34

$\frac{AB}{CB}$，从而可以证明$\frac{EF}{DF}=\frac{AB}{BC}$.

② 若选取过内分点 $F$ 的线段 $FC$ 为平行方向线段(图 2－4－34)，则可过端点 $E$ 作平行线，即将 $FA$ 取作平行方向线段，也就是过 $E$ 作 $EG /\!/ FA$ 交 $BA$ 的延长线于 $G$(图 2－4－35)，可得$\frac{FE}{FD}=\frac{AG}{AD}$，而已知 $AD=CE$，所以$\frac{FE}{FD}=\frac{AG}{CE}$.

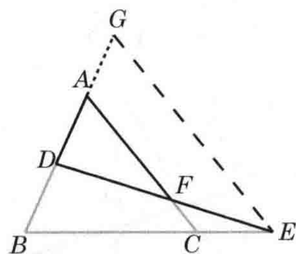


图 2－4－35

又因为要证明的结论是$\frac{EF}{DF}=\frac{AB}{BC}$，所以问题转化为证$\frac{AG}{CE}=\frac{AB}{BC}$.这是一个新的比例关系式，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.经过描图可以发现，$AG$、$AB$ 和 $CE$、$BC$ 这两组相比线段现在都重叠在一直线上，可应用平行线型相似三角形进行证明.

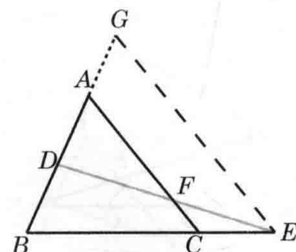


图 2－4－36

因为 $EG /\!/ CA$(图 2－4－36)，所以$\frac{AG}{CE}=\frac{AB}{BC}$，从而可以证明$\frac{EF}{DF}=\frac{AB}{BC}$.

(二) 三角形外的平行线型

$\triangle ABC$ 中，$D$ 是 $BA$ 的延长线上一点，$E$ 是 $CA$ 的延长线上一点，$DE /\!/ BC \Rightarrow \triangle ADE \backsim \triangle ABC$，$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$(图 2－4－37)

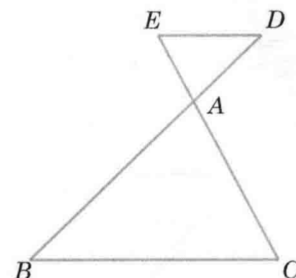


图 2－4－37

由三角形外一条边的平行线得到的平行线型相似三角形应用的第一种情况，出现了三角形外一条边的平行线段，可直接应用平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明.如果这条平行线段还没有和三

角形边的延长线相交，那就延长到相交.

由三角形外一条边的平行线得到的平行线型相似三角形应用的第二种情况，出现了相比两线段重叠在一直线上，这时可添加平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是过端点和端点作平行线.

由三角形外一条边的平行线得到的平行线型相似三角形应用的第三种情况，出现了两组相比两线段都重叠在一直线上，且两两联结四个端点的线段在内分点相交，这时可添加平行线型相似三角形进行证明.添加的方法是将两组端点分别联结，那么这两条连线一定平行，并组成平行线型相似三角形.

由三角形外一条边的平行线得到的平行线型相似三角形应用的第四种情况，出现了相比两线段是平行线段，这时可添加平行线型相似三角形进行证明.添加的方法是将两条平行线段的四个端点两两联结，组成平行线型相似三角形.

根据前述例题的讨论，可以发现由三角形外一条边的平行线得到的平行线型相似三角形与由三角形内一条边的平行线得到的平行线型相似三角形是可以结合在一起应用的，分析方法基本相同，区别在于平行线是过端点和端点作，还是过端点和内分点作.

【例 4】已知：$\triangle ABC$ 中，$D$ 是 $BC$ 的中点，$E$ 是 $AD$ 的中点，联结 $CE$ 并延长交 $AB$ 于 $F$.（图 2-4-38）

求证：$AF=\dfrac{1}{2}BF$.

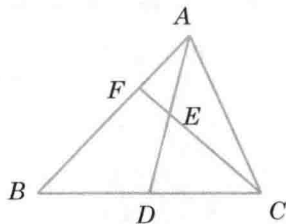



图 2-4-38

分析：本题要证明的结论 $AF=\dfrac{1}{2}BF$ 是线段之间的比例关系，所以条件中给出的 $BD=CD$，$AE=DE$ 也可以看作是相比的两线段，即$\dfrac{BD}{CD}=1$，$\dfrac{AE}{ED}=1$，这样就出现了线段之间的比例关系，应进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现，$AF$ 和 $BF$，$BD$ 和 $CD$，$AE$ 和 $DE$ 这三组相比线段都重叠在一直线上，可应用或添加平行线型相似三角形进行证明.添加的方法是

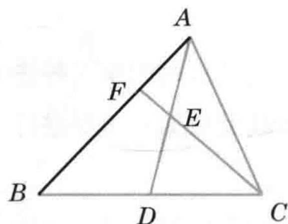


图 2-4-39

过端点和内分点作平行线，首先要选取过端点或内分点的线段为平行方向线段.现在重叠的相比线段有三组，所以从选取哪一组来进行讨论，就有三种情况.

若选取 $AF$、$BF$ 这一组相比线段开始进行讨论（图 2-4-39），则两个端点是 $A$、$B$，内分点是 $F$.

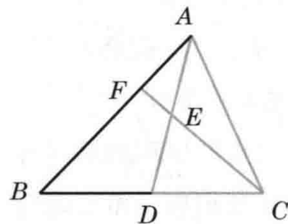


图 2-4-40

图形中过 $A$、$B$、$F$ 的线段分别是 $AC$、$AE$（或 $AD$）、$BD$（或 $BC$）、$FE$（或 $FC$），所以选取平行方向线段就出现了四种情况，对每一种可能性来说，平行线可分别过另两个点作，于是又分别出现了两种情况，所以一共可以有八种可供选择的可能情况，对此可分别予以讨论.

由于 $BD$、$AE$ 是与条件有关的性质，因此可先行讨论.

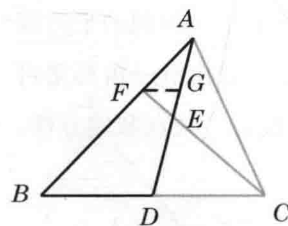


图 2-4-41

(1) 若取 $BD$ 为平行方向线段（图 2-4-40），则平行线既可过内分点 $F$ 作，也可过另一个端点 $A$ 作.

① 若先选取过内分点 $F$ 作平行线，则应作到与过端点 $A$ 的直线相交，于是过 $F$ 作 $FG\parallel BD$ 交 $AD$ 于 $G$（图 2-4-41），就可得$\triangle AFG$ 和$\triangle ABD$ 是由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，可推得$\dfrac{FG}{BD}=\dfrac{AG}{AD}=\dfrac{AF}{AB}$.

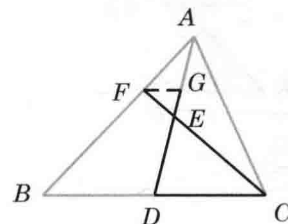


图 2-4-42

而由 $FG\parallel DC$，可得$\triangle FEG$ 和$\triangle CED$ 是由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形（图 2-4-42），所以$\dfrac{FG}{CD}=\dfrac{EG}{ED}$.

由 $BD=CD$，$AE=DE$，可得 $AD=2ED$，所以由$\dfrac{AG}{AD}=\dfrac{EG}{ED}$可进一步推得$\dfrac{AG}{2ED}=\dfrac{EG}{ED}$.从而可得 $AG=$

$2EG$，$AE=3EG$，所以 $AD=2AE=6EG$.

从而可得$\frac{AG}{AD}=\frac{2EG}{6EG}=\frac{1}{3}$，所以$\frac{AF}{AB}=\frac{1}{3}$，于是可证明$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$，$AF=\frac{1}{2}BF$.

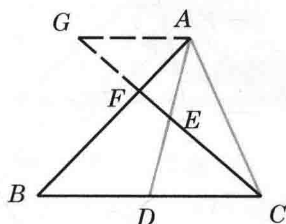


图 2-4-43

② 在选取过端点 $B$ 的线段 $BC$ 为平行方向线段时，还可选取过另一个端点 $A$ 作平行线，并作到与过内分点 $F$ 的直线相交，即过 $A$ 作 $AG /\!/ CB$ 交 $CF$ 的延长线于 $G$(图 2-4-43).

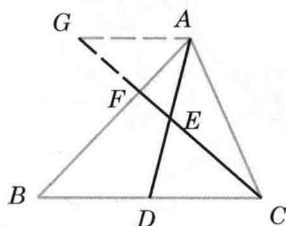


图 2-4-44

这样$\triangle AFG$ 和$\triangle BFC$ 就是由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，所以 $\frac{AF}{BF}=\frac{AG}{BC}$.

又因为 $AE=DE$，且 $AD$、$CG$ 相交于 $E$，出现了两条相等的线段位于一组对顶角的两边而且成一直线，所以可应用中心对称型全等三角形进行证明(图 2-4-44).根据过两端点的平行线与过中点的直线相交组成中心对称型全等三角形的方法，可找到这对全等三角形是$\triangle AEG$ 和$\triangle DEC$(图 2-4-45)，全等的条件是$\angle AEG=\angle DEC$，$AE=DE$，$\angle EAG=\angle EDC$.所以 $AG=DC$.又由 $BD=DC$，$BC=2DC$，可得 $BC=2AG$，从而可推得$\frac{AF}{BF}=\frac{AG}{BC}=\frac{1}{2}$，$AF=\frac{1}{2}BF$.

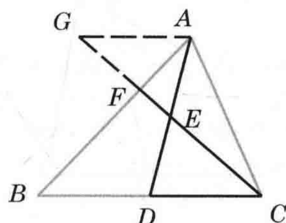


图 2-4-45

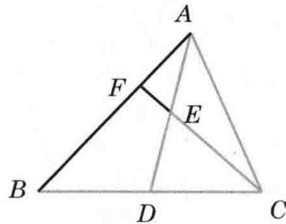


图 2-4-46

(2) 若选取过内分点 $F$ 的线段 $FE$ 为平行方向线段(图 2-4-46)，则可选取过端点 $A$ 或端点 $B$ 作平行线，并作到与过另一个端点的直线相交.

① 若选择过端点 $A$ 作平行线，则过 $A$ 作 $AG /\!/ FE$ 交 $BC$ 的延长线于 $G$(图 2-4-47)(实际上也可

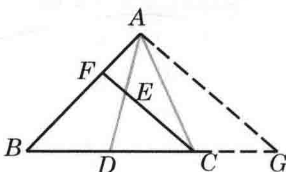


图 2-4-47

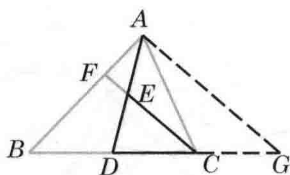


图 2-4-48

以看作是取 $FC$ 为平行方向线段），可得$\frac{AF}{BF}=\frac{GC}{BC}$.

因为 $AE=DE$，且 $AG /\!/ EC$，所以应用三角形的中位线的基本图形的性质（图 2-4-48），可得 $GC=DC$.

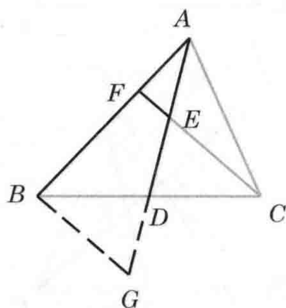


图 2-4-49

又因为 $BD=CD$，所以 $BD=CD=CG$，从而可得 $BC=2GC$，$\frac{GC}{BC}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{AF}{BF}=\frac{GC}{BC}=\frac{1}{2}$，分析得以完成.

② 若选择过端点 $B$ 作平行线，则也应作到与过另一个端点 $A$ 的直线相交，即过 $B$ 作 $BG /\!/ FE$ 交 $AD$ 的延长线于 $G$（图 2-4-49），可得$\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{GE}$.

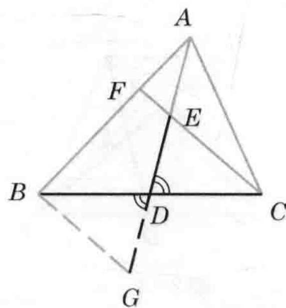


图 2-4-50

又因为 $BD=CD$，且 $BC$、$EG$ 相交于 $D$，出现了两条相等的线段位于一组对顶角的两边而且成一直线（图 2-4-50），所以可应用中心对称型全等三角形进行证明.

根据过两端点的平行线与过中点的直线相交组成全等三角形的方法，可找到这对全等三角形应是 $\triangle BDG$ 和 $\triangle CDE$（图 2-4-51），全等的条件是 $\angle BDG=\angle CDE$，$BD=CD$，$\angle DBG=\angle DCE$，所以 $GD=ED$.

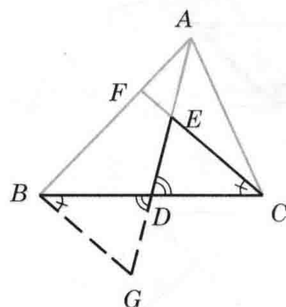


图 2-4-51

因为 $AE=DE$，所以 $AE=DE=GD$，于是 $GE=2AE$，$\frac{AE}{GE}=\frac{1}{2}$，从而可推得$\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{GE}=\frac{1}{2}$.

(3) 若选取过端点 $A$ 的线段 $AE$ 为平行方向线段，则平行线可选择过内分点 $F$ 或另一个端点 $B$ 作.

① 若选择过内分点 $F$ 作平行线，则应作到与过另一个端点 $B$ 的直线相交，于是过 $F$ 作 $FG /\!/ AD$ 交 $BD$

于 $G$(图 2－4－52)(实际上也可以看作是取 $AD$ 为平行方向线段)，可得$\frac{AF}{BF}=\frac{DG}{BG}$.

由 $FG /\!/ ED$，可得$\triangle CED$ 和$\triangle CFG$ 是由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形(图 2－4－53)，所以$\frac{FE}{CE}=\frac{GD}{CD}$，$\frac{ED}{FG}=\frac{CD}{CG}$.

又由 $AE=DE$，且 $AE /\!/ FG$，这是两条平行线段(图 2－4－54)，可应用或添加平行线型相似三角形进行证明.添加的方法是将这两条平行线段的四个端点两两的连线延长到相交，组成相似三角形.

于是联结 $GE$，延长 $GE$ 交 $FA$ 的延长线于 $H$(图 2－4－55)，可得$\triangle HAE$ 和$\triangle HFG$ 相似，所以$\frac{AE}{FG}=\frac{HA}{HF}$.

而已知 $AE=DE$，所以$\frac{CD}{CG}=\frac{HA}{HF}$，从而可发现 $HC$、$AD$、$FG$ 是三条平行线，而图形中 $HC$ 尚未出现，所以应将 $HC$ 添上，即联结 $HC$(图 2－4－56).

由$\frac{CD}{CG}=\frac{HA}{HF}$，可推得 $HC /\!/ AD /\!/ FG$，于是可发现，$FG$ 是$\triangle BHC$ 内一条边 $HC$ 的平行线段(图 2－4－57)，从而可得$\triangle BFG$ 和$\triangle BHC$ 是由三角形内一

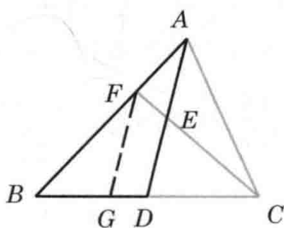


图 2－4－52

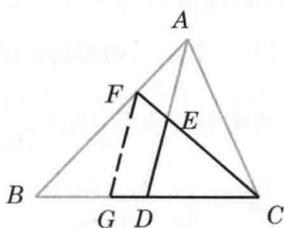


图 2－4－53

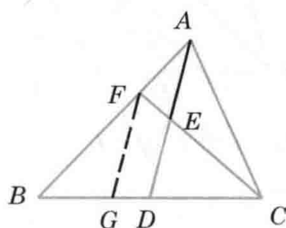


图 2－4－54

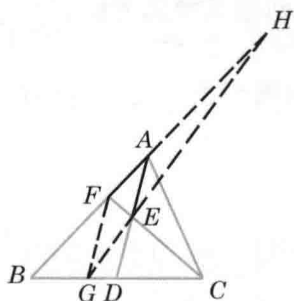


图 2－4－55

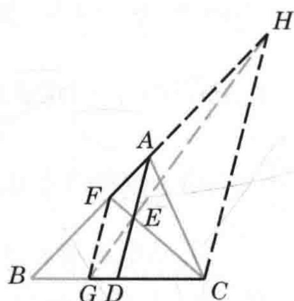


图 2－4－56

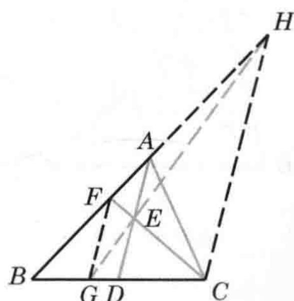


图 2－4－57

条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，所以 $\frac{BG}{BC}=\frac{FG}{HC}$.

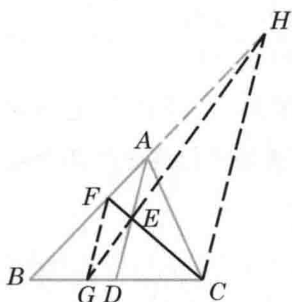


图 2-4-58

由 $FG$、$HC$ 是两条平行线段，且它们的四个端点两两的连线在点 $E$ 相交，可应用由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形进行证明，可找到这对相似三角形是 $\triangle FEG$ 和 $\triangle CEH$（图 2-4-58），从而可得 $\frac{FE}{CE}=\frac{FG}{CH}$，所以 $\frac{BG}{BC}=\frac{FE}{CE}$，又因为 $\frac{FE}{CE}=\frac{GD}{CD}$，所以 $\frac{BG}{BC}=\frac{GD}{CD}$.

因为 $BD=CD$，$BC=2CD$，所以 $\frac{BG}{2CD}=\frac{GD}{CD}$，$BG=2GD$，$BF=2AF$ 就得以证明.

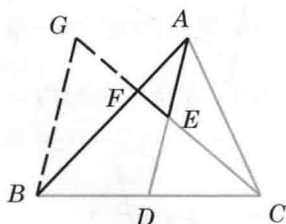


图 2-4-59

② 若选择过另一个端点 $B$ 作平行线，则应作到与过内分点 $F$ 的直线相交，即过 $B$ 作 $BG\parallel EA$ 交 $EF$ 的延长线于 $G$（图 2-4-59）. 于是 $\triangle AEF$ 和 $\triangle BGF$ 是由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，所以 $\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{BG}$，这样问题就转化为证 $\frac{AE}{BG}=\frac{1}{2}$.

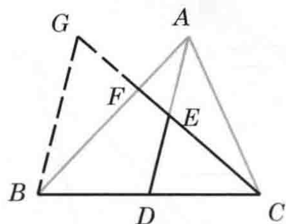


图 2-4-60

又因为 $AE=DE$，所以问题又转化为证 $\frac{DE}{BG}=\frac{1}{2}$. 由 $BD=CD$，且 $DE\parallel BG$（图 2-4-60），可得 $DE=\frac{1}{2}BG$，分析就得以完成.

(4) 若选取过端点 $A$ 的线段 $AC$ 为平行方向线段，则平行线可选择过内分点 $F$ 或另一个端点 $B$ 作.

① 若选择过内分点 $F$ 作平行线，则应作到与过另一个端点 $B$ 的直线相交. 于是过 $F$ 作 $FG /\!/ AC$ 交 $BC$ 于 $G$，交 $AD$ 于 $H$（图 2－4－61），那么 $\triangle BFG$ 和 $\triangle BAC$ 是由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，所以 $\dfrac{FG}{AC}=\dfrac{BG}{BC}$，$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{CG}{BG}$.

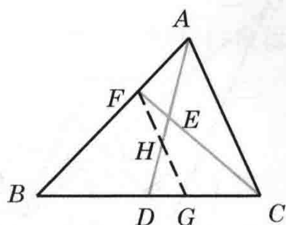


图 2－4－61

又因为 $FH$、$AC$ 是两条平行线段，且它们的四个端点两两的连线在点 $E$ 相交，所以可应用由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形进行证明，可找到这对相似三角形应是 $\triangle FEH$ 和 $\triangle CEA$（图 2－4－62），从而可得 $\dfrac{FH}{CA}=\dfrac{FE}{CE}$.

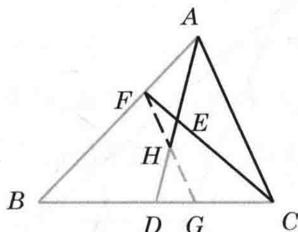


图 2－4－62

由 $FE$ 和 $CE$ 这两条相比线段重叠在一直线上，可应用或添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是过端点 $F$ 和内分点 $E$ 作平行线，即过 $E$ 作 $EI /\!/ FG$ 交 $GC$ 于 $I$（图 2－4－63），可得 $\dfrac{FE}{CE}=\dfrac{GI}{CI}$.

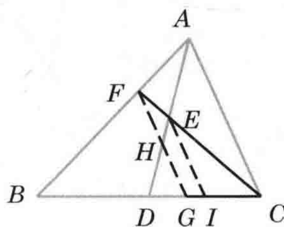


图 2－4－63

又因为 $AE=DE$，且 $EI /\!/ FG /\!/ AC$，所以 $DI=CI$（图 2－4－64）.

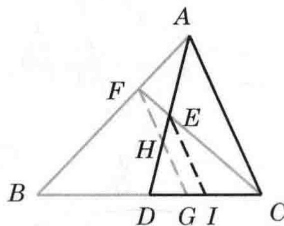


图 2－4－64

由 $FG=FH+GH$，可得 $\dfrac{FG}{AC}=\dfrac{(FH+GH)}{AC}=\dfrac{FH}{AC}+\dfrac{GH}{AC}=\dfrac{GI}{CI}+\dfrac{GD}{CD}=\dfrac{(DI-DG)}{CI}+\dfrac{GD}{CD}=\dfrac{(DC-2DG)}{CD}+\dfrac{GD}{CD}=\dfrac{(DC-DG)}{CD}$.

又由 $\dfrac{FG}{AC}=\dfrac{BG}{BC}=\dfrac{(BD+DG)}{2CD}=\dfrac{(CD+DG)}{2CD}$，可得 $CD+DG=2DC-2DG$，$CD=3DG$，并可进一步推得 $CG=2DG$，$BG=4DG$，

从而可证明$\frac{CG}{BG}=\frac{1}{2}$,分析得以完成.

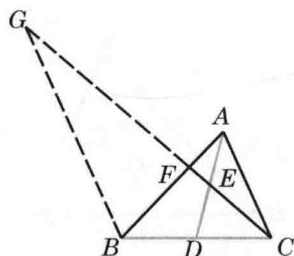


图 2-4-65

② 若选取过端点 $A$ 的线段 $AC$ 为平行方向线段,则平行线选择过端点 $B$ 作,且应作到与过内分点 $F$ 的直线相交,即过 $B$ 作 $BG/\!/CA$ 交 $CF$ 的延长线于 $G$(图 2-4-65),于是$\triangle ACF$ 和$\triangle BGF$ 是由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形,所以$\frac{AF}{BF}=\frac{AC}{BG}$.

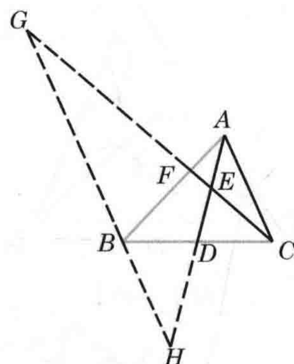


图 2-4-66

由 $BG/\!/CA$,过其中一条线段 $AC$ 的两个端点的直线可以相交于点 $F$,也可以相交于点 $E$,可以添加平行线型相似三角形进行证明.由于图形中平行线中的另一条 $BG$ 尚未与过点 $E$ 的直线 $AE$ 相交,因此应将它们延长到相交,即延长 $GB$ 交 $AD$ 的延长线于 $H$(图 2-4-66).于是$\triangle ACE$ 和$\triangle HGE$ 是由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形,所以$\frac{AC}{HG}=\frac{AE}{HE}$.

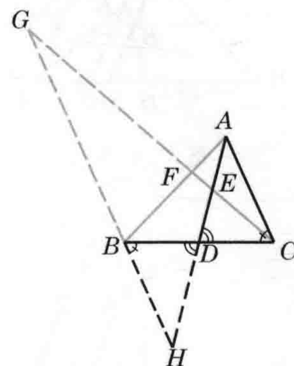


图 2-4-67

由 $BD=CD$,且 $BC$、$AH$ 相交于 $D$,就出现了两条相等的线段位于一组对顶角的两边而且成一直线,可应用或添加中心对称型全等三角形进行证明.

根据由过端点的平行线与过中点 $D$ 的直线相交组成中心对称型全等三角形的方法,可找到这对全等三角形是$\triangle ACD$ 和$\triangle HBD$(图 2-4-67),全等的条件是 $\angle ADC=\angle HDB$, $CD=BD$, $\angle ACD=\angle HBD$,所以 $AD=HD$,$AC=HB$.

由 $AE=DE$,即 $AD=2AE$,可得 $DH=2AE$,$EH=ED+DH=AE+2AE=3AE$,所以$\frac{AE}{EH}=\frac{1}{3}$,

$\frac{AC}{HG}=\frac{1}{3}$，$HG=3AC$.

又因为 $HB=AC$，所以 $BG=HG-HB=3AC-AC=2AC$，从而可以推得 $\frac{AC}{BG}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$就得以证明.

在完成了以上八种情况的讨论以后，可以发现对于这个问题，实际上我们只讨论了三分之一，因为我们仅是从 $AF$、$BF$ 这一组重叠的相比线段出发进行讨论的，而问题中出现的重叠的相比线段还有两组，即 $AE$、$DE$ 和 $BD$、$CD$.如果从这两组重叠的相比线段出发进行讨论，那么也可以添加平行线型相似三角形进行证明，添加的方法同样是过端点和内分点作平行线，这时也要先取平行方向线段.接下来可以发现，每一种情况中的平行方向线段都可以有四条，而对每一条平行方向线段来说，过哪个点作平行线又有两种情况，所以本题一共就会出现 24 种情况和相应的添线方法.

若选取 $AE$、$DE$ 这一组相比线段开始进行讨论，则两个端点是 $A$、$D$，内分点是 $E$，过 $A$、$D$、$E$ 的线段分别是 $AB$(或 $AF$)、$AC$、$DB$(或 $DC$)、$EF$(或 $EC$)，于是选取平行方向线段就出现了四种情况.对每一种可能性来说，平行线可分别过另两个点作，又出现了两种情况，所以共有八种情况，对此可分别予以讨论.

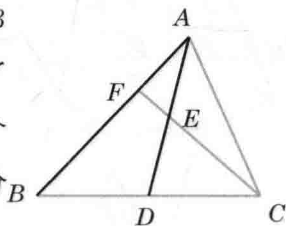


图 2-4-68

由于 $AB$(或 $AF$)、$BD$(或 $DC$)是与条件或结论有关的性质，因此可先行讨论.

(5) 若取 $AB$ 为平行方向线段(图 2-4-68)，则由平行方向线段过端点 $A$，平行线可以过内分点 $E$ 作，也可以过另一个端点 $D$ 作.

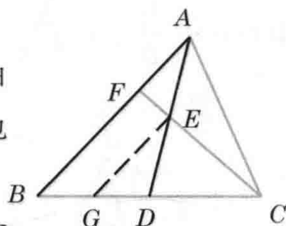


图 2-4-69

① 若首先选择过内分点 $E$ 作平行线，也就是过 $E$ 作 $EG\parallel AB$ 交 $BD$ 于 $G$(图 2-4-69).则由 $AE=DE$，可得 $BG=DG$，$EG=\frac{1}{2}AB$.

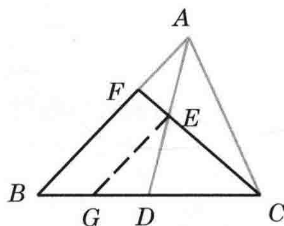


图 2-4-70

而由 $EG\parallel FB$，又可得$\triangle CEG$ 和$\triangle CFB$(图 2-4-70)是由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，可推得$\frac{EG}{FB}=\frac{CG}{CB}$.因为 $BD=CD=2BG$，所以 $BC=4BG$，$CG=CD+DG=2BG+BG=3BG$，可得$\frac{CG}{CB}=\frac{3BG}{4BG}=\frac{3}{4}$，并可进一步推得$\frac{EG}{FB}=\frac{3}{4}$，所以 $BF=\frac{4}{3}EG=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}AB=\frac{2}{3}AB$，又可推得 $AF=\frac{1}{3}AB$，所以$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$得以证明.

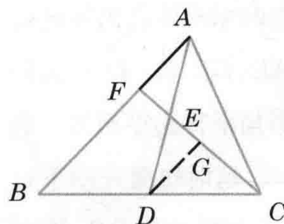


图 2-4-71

② 若取 $AB$ 为平行方向线段后，选取过另一个端点 $D$ 作平行线，则应作到与过内分点的直线相交，即过 $D$ 作 $DG\parallel BA$ 交 $CF$ 于 $G$(图 2-4-71)(也可以看作是取 $FA$ 为平行方向线段).

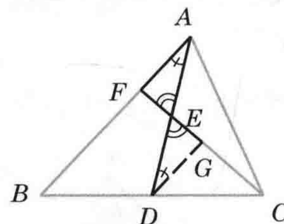


图 2-4-72

而由 $AE=DE$，于是得到平行线型相似三角形的特殊情况，即$\triangle AFE$ 和$\triangle DGE$ 是一对中心对称型全等三角形(图 2-4-72)，全等的条件是$\angle FEA=\angle GED$，$AE=DE$，$\angle EAF=\angle EDG$，从而可以证明 $AF=DG$.

因为 $BD=CD$，且 $DG\parallel BF$，所以 $CG=FG$，$DG=\frac{1}{2}BF$，可得 $AF=\frac{1}{2}BF$.

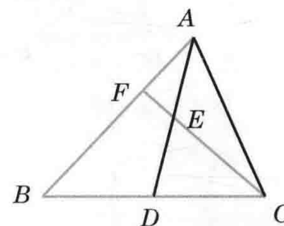


图 2-4-73

(6) 若选取 $AC$ 为平行方向线段(图 2-4-73)，则可以过内分点 $E$ 或端点 $D$ 作平行线.

① 若选择过内分点 $E$ 作平行线，则过 $E$ 作 $EG\parallel AC$ 交 $CD$ 于 $G$(图 2-4-74).

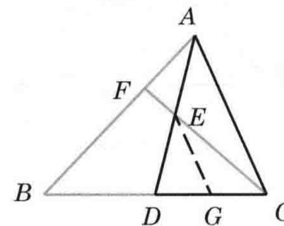


图 2-4-74

由 $AE=DE$，可得 $DG=CG$，即$\frac{EG}{AC}=\frac{1}{2}$.由 $BD$

$=CD$，可得 $BG=BD+DG=2DG+DG=3DG=3CG$，即$\frac{CG}{BG}=\frac{1}{3}$.

这样又出现了 $CG$、$BG$ 这一组相比线段重叠在一直线上，可继续添加平行线型相似三角形进行证明.

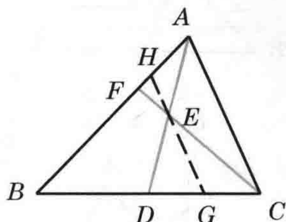


图 2-4-75

由于 $GE$ 是过内分点 $G$ 所作的边 $CA$ 的平行线，而 $GE$ 尚未与过端点 $B$ 的直线 $BA$ 相交，因此应先将它们延长到相交，即延长 $GE$ 交 $AB$ 于 $H$（图 2-4-75）.这样就得到$\triangle BHG$ 和$\triangle BAC$ 是由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，可进一步推得$\frac{BH}{BA}=\frac{HG}{AC}=\frac{BG}{BC}$，而$\frac{BG}{BC}=\frac{3}{4}$，所以$\frac{BH}{BA}=\frac{HG}{AC}=\frac{3}{4}$，可得 $HE=HG-EG=\frac{3}{4}AC-\frac{1}{2}AC=\frac{1}{4}AC$，$BH=3AH$.

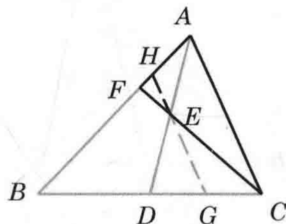


图 2-4-76

又由 $HE\,/\!/\,AC$，可得$\triangle FEH$ 和$\triangle FCA$ 是由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形（图 2-4-76），所以$\frac{FH}{FA}=\frac{HE}{AC}=\frac{1}{4}$，$AF=4FH$，$AH=3FH$.

从而可得 $BH=3AH=9FH$，所以 $BF=BH-FH=9FH-FH=8FH$，从而可以证明$\frac{AF}{BF}=\frac{4FH}{8FH}=\frac{1}{2}$.

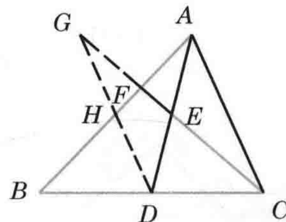


图 2-4-77

② 若选取 $AC$ 为平行方向线段，则可选取过另一个端点 $D$ 作平行线，于是过 $D$ 作 $DG\,/\!/\,CA$ 交 $CF$ 的延长线于$G$，交 $AB$ 于 $H$（图 2-4-77）.

由 $AE=DE$，得到平行线型相似三角形的特殊情

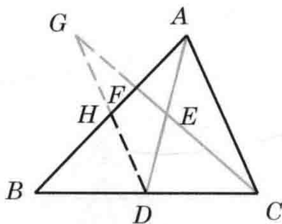


图 2-4-78

况,即$\triangle ACE$和$\triangle DGE$是一对中心对称型全等三角形,全等的条件是$\angle AEC=\angle DEG$,$AE=DE$,$\angle EAC=\angle EDG$.可得$DG=AC$.

由于$BD=CD$,且$DH/\!/CA$,因此可应用三角形中位线的基本图形的性质(图 2-4-78),得到$AH=BH$,$DH=\frac{1}{2}AC$,从而可得$GH=\frac{1}{2}AC$.

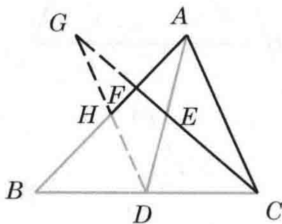


图 2-4-79

由$GH$与$AC$是两条平行线段,且它们的四个端点两两的连线在$F$点相交,可应用由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形进行证明(图 2-4-79).于是找到这对相似三角形是$\triangle ACF$和$\triangle HGF$,从而可得$\frac{FH}{FA}=\frac{GH}{AC}$.因为$\frac{GH}{AC}=\frac{1}{2}$,所以$\frac{FH}{FA}=\frac{1}{2}$,$AF=2FH$.

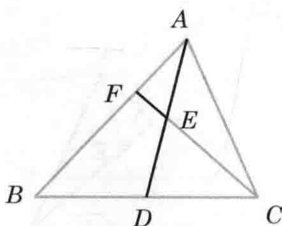


图 2-4-80

又因为$BF=BH+FH=AH+FH=AF+FH+FH=2FH+2FH=4FH$,所以$\frac{AF}{BF}=\frac{2FH}{4FH}=\frac{1}{2}$,从而可以完成分析.

(7) 若选取$EF$(或$EC$)为平行方向线段(图 2-4-80),则平行线既可以过端点$D$作,也可以过另一个端点$A$作.

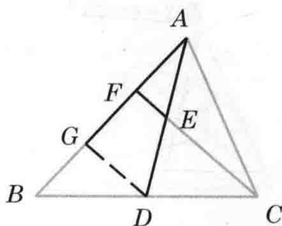


图 2-4-81

① 若选择过端点$D$作平行线,则过$D$作$DG/\!/EF$交$AB$于$G$(图 2-4-81).

由$AE=DE$,可应用三角形中位线的基本图形的性质,得到$AF=GF$.

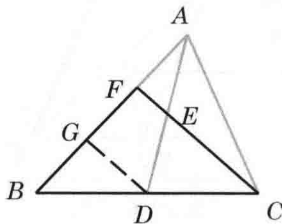


图 2-4-82

又由$BD=CD$,且$DG/\!/CF$,可得$BG=FG$(图 2-4-82),所以$BG=FG=AF$.从而可得$BF=2AF$,

所以$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$就得以证明.

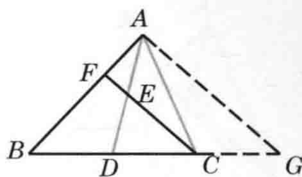


图 2-4-83

② 若以 $EF$ 为平行方向线段，过端点 $A$ 作平行线，则过 $A$ 作 $AG /\!/ EC$ 交 $BC$ 的延长线于 $G$（图 2-4-83）.

由 $AE=DE$，可应用三角形中位线的基本图形的性质，得到 $DC=GC$. 又由 $BD=CD$，可得 $BD=CD=GC$，所以 $BC=2CD=2GC$，从而可得$\frac{GC}{BC}=\frac{1}{2}$.

又因为 $AG /\!/ FC$，所以可应用由三角形内一条边的平行线得到的平行线型相似三角形的基本图形的性质，就可以证明$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$.

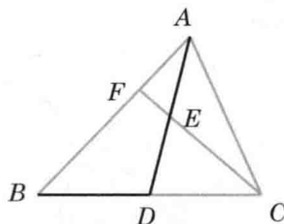


图 2-4-84

(8) 若选取 $DB$（或 $DC$）为平行方向线段（图 2-4-84），平行线既可以过内分点 $E$ 作，也可以过另一个端点 $A$ 作.

① 若选择过内分点 $E$ 作平行线，则过 $E$ 作 $EG /\!/ DB$ 交 $AB$ 于 $G$（图 2-4-85）.

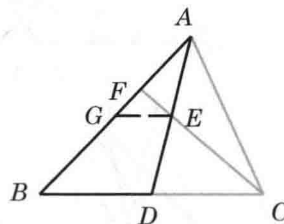


图 2-4-85

于是由 $AE=DE$，可应用三角形中位线的基本图形的性质，得到 $AG=BG$，$EG=\frac{1}{2}BD$.

又由 $EG /\!/ CB$，就出现了 $EG$ 是$\triangle FBC$ 内一条边 $CB$ 的平行线段，可得$\triangle FEG$ 和$\triangle FCB$ 是由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形（图 2-4-86），所以$\frac{FG}{FB}=\frac{EG}{CB}$.

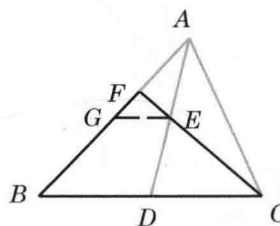


图 2-4-86

又因为 $BD=CD$，所以 $BC=2BD=4EG$，可得$\frac{EG}{CB}=\frac{1}{4}$，所以$\frac{FG}{FB}=\frac{1}{4}$，$FB=4FG$.

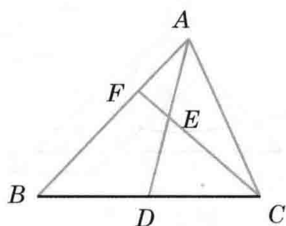


图 2-4-87

于是可进一步推得 $BG=BF-FG=4FG-FG=3FG$，所以 $AG=BG=3FG$，可得 $AF=AG-FG=2FG$，从而可以证明$\frac{AF}{BF}=\frac{2FG}{4FG}=\frac{1}{2}$.

② 若选取过另一个端点 $A$ 作平行线，则具体添线方法和证明方法同分析(1)②.

若选取 $BD$、$CD$ 这一组相比(也是相等)线段进行讨论(图 2-4-87)，则这时的两个端点是 $B$、$C$，内分点是 $D$.

图形中过 $B$、$C$、$D$ 的线段分别是 $BF$(或 $BA$)、$CE$(或 $CF$)、$CA$、$DE$(或 $DA$)，于是选取平行方向线段也就出现了四种情况.

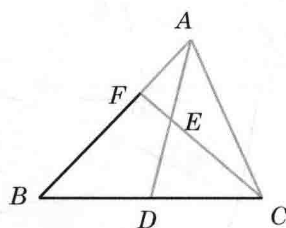


图 2-4-88

对每一种情况来说，平行线可分别过另两个点作，所以又分别出现了两种情况，所以共有八种情况.

(9) 若取 $BF$ 为平行方向线段(图 2-4-88)，则由平行方向线段过端点 $B$，平行线可以过内分点 $D$ 作，也可以过另一个端点 $C$ 作.

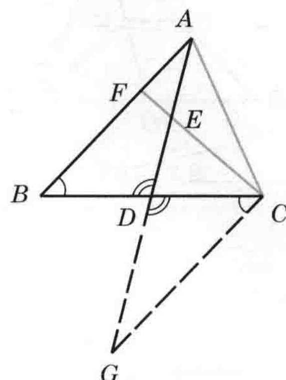


图 2-4-89

① 若选择过内分点 $D$ 作平行线，则具体添线方法和证明方法同分析(5)②.

② 若选取 $BF$ 为平行方向线段，过另一个端点 $C$ 作平行线(图 2-4-89)，则应作到与过内分点 $D$ 的直线相交.则过 $C$ 作 $CG/\!/AB$ 交 $AD$ 的延长线于 $G$.

因为 $BD=CD$，所以$\triangle ABD$ 和$\triangle GCD$ 不仅是一对平行线型相似三角形，而且是一对中心对称型全等三角形，全等的条件是$\angle ADB=\angle GDC$，$BD=CD$，$\angle ABD=\angle GCD$.所以 $AD=GD$，$AB=GC$，由 $AE=DE$，可得 $AD=2AE$，$GD=2AE$，也就可得 $GE=GD$

$+DE=2AE+AE=3AE$，所以$\frac{AE}{GE}=\frac{1}{3}$.

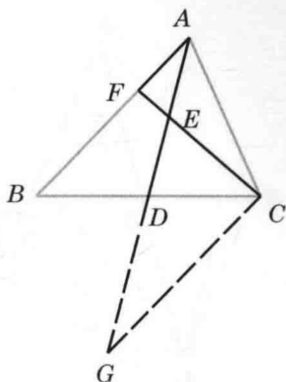


图 2-4-90

又由 $AF$、$CG$ 是两条平行线段，且它们的四个端点两两的连线在点 $E$ 相交，可应用由三角形外一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形进行证明（图 2-4-90）. 可找到这对相似三角形应是$\triangle AEF$ 和$\triangle GEC$.从而又可得$\frac{AF}{GC}=\frac{AE}{GE}=\frac{1}{3}$，所以$\frac{AF}{AB}=\frac{1}{3}$，从而可证明$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$.

(10) 若取 $DE$ 为平行方向线段，则由平行方向线段过内分点 $D$，平行线可以过点 $B$ 作，也可以过另一个端点 $C$ 作.

① 若选取过端点 $B$ 作平行线，则具体添线方法和证明方法同分析(3)②.

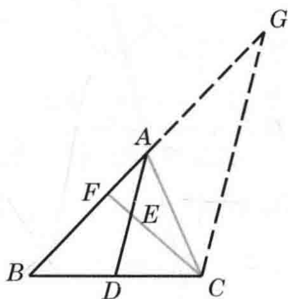


图 2-4-91

② 若选取过端点 $C$ 作平行线，则应作到与过另一个端点 $B$ 的直线相交，于是过 $C$ 作 $CG\parallel DA$ 交 $BA$ 的延长线于$G$(图 2-4-91).由 $BD=CD$，可应用三角形中位线的基本图形的性质，得到$AB=AG$，$AD=\frac{1}{2}CG$.又因为$AE=DE$，所以$AE=\frac{1}{2}AD$，从而可进一步推得$AE=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}CG=\frac{1}{4}CG$.

因为$AE\parallel GC$，所以 $AE$ 是$\triangle FGC$ 内一条边 $GC$ 的平行线段，可得$\triangle FAE$ 和$\triangle FGC$ 是由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形（图 2-4-92），所以$\frac{FA}{FG}=\frac{AE}{GC}=\frac{1}{4}$，从而可得 $FG=4FA$，$AG=3FA$.又因为已证 $AB=AG$，所以 $AB=3FA$，$BF=$

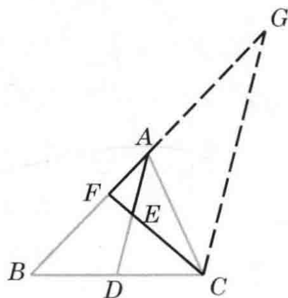


图 2-4-92

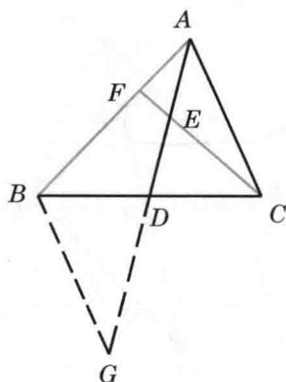


图 2-4-93

$2AF$，从而可证明$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$.

(11) 如取 $CA$ 为平行方向线段，则由平行方向线段过端点 $C$，平行线可以过内分点 $D$ 作，也可以过另一个端点 $B$ 作.

① 若选取过内分点 $D$ 作平行线，则具体添线方法和证明方法同分析(6)②.

② 若选取过另一个端点 $B$ 作平行线，则过 $B$ 作 $BG /\!/ AC$ 交 $AD$ 的延长线于 $G$(图 2-4-93). 于是可得$\triangle ACD$ 和$\triangle GBD$ 是一对中心对称型全等三角形，全等的条件是$\angle ADC=\angle GDB$，$CD=BD$，$\angle CAD=\angle BGD$. 所以 $AD=GD$，$AC=GB$.

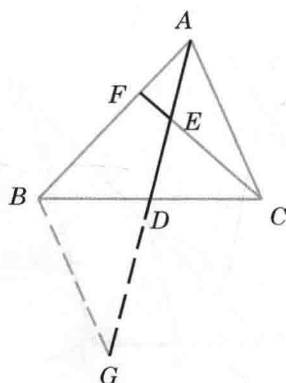


图 2-4-94

又因为 $AE=DE$，所以 $AD=2AE$，$GD=2AE$，可得 $GE=GD+DE=2AE+AE=3AE$，所以$\frac{AE}{GE}=\frac{1}{3}$.

经过描图可以发现，相比两线段 $AE$、$GE$ 重叠在一直线上，从而可添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是过端点和内分点作平行线.

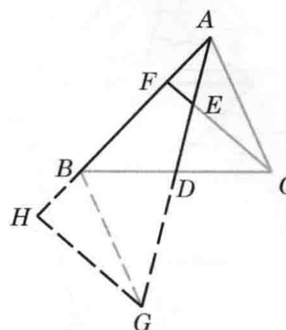


图 2-4-95

若取过内分点的线段 $EF$ 为平行方向线段(图 2-4-94)，则可过端点 $G$ 作平行线，于是过 $G$ 作 $GH /\!/ EF$ 交 $AB$ 的延长线于 $H$(图 2-4-95)，可得$\frac{AF}{HF}=\frac{AE}{GE}=\frac{1}{3}$.

现在的问题是证$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$，从而问题转化为证 $AF=BH$.

由 $AC \parallel BG$，可得 $\angle CAF = \angle GBH$，所以 $\triangle CAF$ 和 $\triangle GBH$ 是一对平移型全等三角形(图 2-4-96)，$AF=BH$ 得以证明.

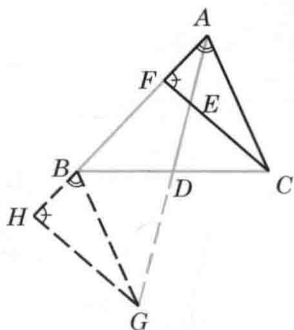


图 2-4-96

(12) 若取 $CE$ 为平行方向线段，则由平行方向线段过端点 $C$，平行线可以过内分点 $D$ 作，也可以过另一端点 $B$ 作.

① 若选取过内分点 $D$ 作平行线，则具体添线方法和证明方法同分析(7)①.

② 若选取过另一端点 $B$ 作平行线，则具体添线方法和证明方法同分析(2)②.

在对上述 24 种可能情况都进行了讨论以后，我们可以发现，每一种方法的思维过程都是有道理的，都是规律性的分析方法应用的结果，没有一种方法是通过试一试、碰运气得到的，所以以上分析方法就是具有科学性的思维方法.

通过分析和讨论我们也可以看到，这样一道题目在分析方法上已经可以覆盖平行线型相似三角形的全部思想方法，所以完成这样一道题目的教学，让学生掌握这样一种具有规律性的分析方法，对于提高教学质量来说，也具有重要的意义.当然，如果我们再作深一步的讨论，可以发现这 24 种可能的情况和相应的解题方法是有难易程度上的差别的，有的很容易想出来，有的思考难度相当大，应用时有一条原则，就是凡是与条件发生联系的可能情况应首先进行讨论，而且一定可以完成分析，因为此时条件都可以直接应用，相对来说问题就容易直接得到解决.如果一种可能情况和条件没有直接联系，而是和结论有联系时，由于结论是不能直接应用的，所以必定还要设法与条件建立联系，这样思维过程就会多一个需衔接的环节，证明难度就会增大.如果一种可能情况和条件没有直接联系，和结论也没有直接联系，这时一定要设法与条件和结论都建立联系，思维过程就会增加更多需衔接的环节，难度就会更大.因此，在教学中要向学生强调，凡是与条件发生联系的可能情况应首先讨论，而且一定可以完成分析.

通过以上讨论，我们也可以看到具有规律性的分析方法在几何问题的分析和思维过程中的重要价值.掌握了规律性的分析方法，我们的思维就可以在几何教学的广阔天地中自由驰骋，没有任何困难能阻挡我们走向成功，无论是教师的教还是学生的学，都可以进入另一种境界，思维也真正得以升华.

在上述平行线型相似三角形的基本图形中，出现了平行线型相似三角形的组合图形，为了这个问题本身的完整性，接下来将应用平行线型相似三角形的组合图形的分析方法逐一进行介绍.

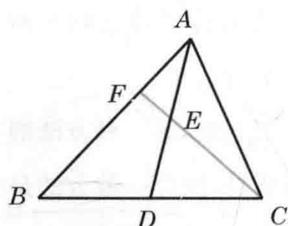


图 2-4-97

(13) 在对比例线段进行描图时，可以发现 $BD$、$CD$ 这一组相比(相等)线段重叠在一直线上，且过两个端点 $B$、$C$ 和内分点 $D$ 的三直线 $AB$、$AC$、$AD$ 共点于 $A$(图 2-4-97)，从而可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明.添加的方法是使过端点和内分点的共点三直线与一组平行线相交.由于现在图形中还没有平行线，因此应先将平行线添上.又因为现在图形中能够作 $AC$ 的平行线的点只有两个，就是 $E$、$F$，所以取点作平行线就出现了两种情况.

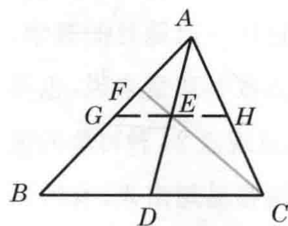


图 2-4-98

① 若考虑选取点 $E$，则过 $E$ 作 $GH \parallel BC$，分别交 $AB$、$AC$ 于 $G$、$H$(图 2-4-98)，可得 $\frac{GE}{HE}=\frac{BD}{CD}$.因为 $BD=CD$，所以 $GE=HE$.

又因为 $AE=DE$，且 $AD$、$GH$ 相交于 $E$，即这两组相等的线段都位于一组对顶角的两边且成一直线，所以可应用或添加中心对称型全等三角形进行证明(图 2-4-99).

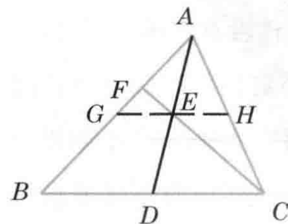


图 2-4-99

根据将四个端点两两联结得到中心对称型全等三角形的方法，应联结 $HD$，交 $CF$ 于 $I$，可得$\triangle AEG \cong \triangle DEH$（图 2-4-100），全等的条件是 $EG=EH$，$\angle AEG=\angle DEH$，$AE=DE$.

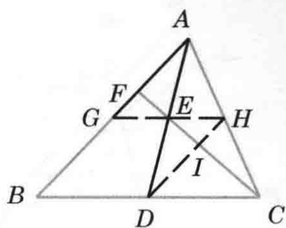


图 2-4-100

于是可得 $HD /\!/ AG$，即 $HD /\!/ AB$.而要证明的结论是$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{1}{2}$，这样又出现了 $AF$、$BF$ 这一组相比线段重叠在一直线上，且过两个端点 $A$、$B$ 和内分点 $F$ 的三直线 $BC$、$AC$、$FC$ 共点于 $C$（图 2-4-101），从而可应用平行线型相似三角形的组合图形进行证明.

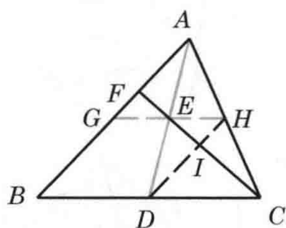


图 2-4-101

于是可得$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{HI}{DI}$，这样问题就转化为证明$\dfrac{HI}{DI}=\dfrac{1}{2}$.

由于 $HI$、$DI$ 这两条相比线段重叠在一直线上，因此还是可应用平行线型相似三角形进行证明.

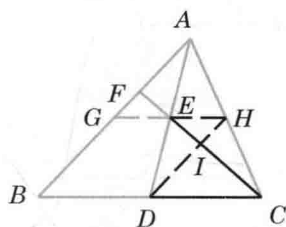


图 2-4-102

由于过端点 $H$、$D$ 已经出现了 $EH$ 和 $DC$ 这一组平行线，因此这一对相似三角形应是$\triangle EIH$ 和$\triangle CID$（图 2-4-102），可得$\dfrac{HI}{DI}=\dfrac{EH}{CD}$，所以问题又转化为证$\dfrac{EH}{CD}=\dfrac{1}{2}$.

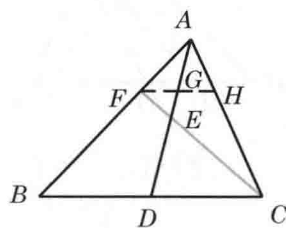


图 2-4-103

而由 $AE=DE$，且 $EH /\!/ DC$，可得 $CD=2EH$，分析得以完成.

② 若选取过点 $F$ 作平行线，则过 $F$ 作 $FH /\!/ BC$ 交 $AD$、$AC$ 于 $G$、$H$（图 2-4-103），可得$\dfrac{FG}{HG}=\dfrac{BD}{CD}$.

因为 $BD=CD$，所以 $FG=HG$.又因为 $GH /\!/ DC$，就出现了 $GH$ 是$\triangle ADC$ 内一条边 $DC$ 的平行线段（图 2-4-104），从而可得$\triangle AGH$ 和$\triangle ADC$ 是由

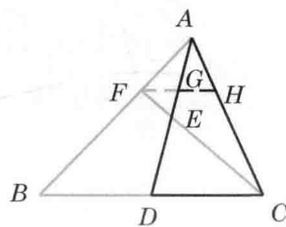


图 2-4-104

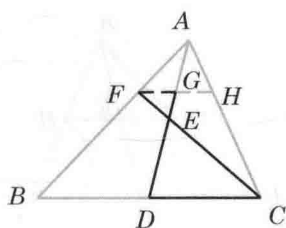


图 2-4-105

三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形，所以$\frac{HG}{CD}=\frac{AG}{AD}$.

由于 $FG$、$DC$ 是两条平行线段，且它们的四个端点两两的连线在点 $E$ 相交，因此可应用平行线型相似三角形进行证明. 于是可找到这对相似三角形应是$\triangle FEG$ 和$\triangle CED$（图 2-4-105），从而可得$\frac{FG}{CD}=\frac{EG}{ED}$，又因为 $FG=HG$，所以$\frac{AG}{AD}=\frac{EG}{ED}$. 又由 $AE=DE$，即 $AD=2ED$，可得$\frac{AG}{2ED}=\frac{EG}{ED}$. 所以 $AG=2EG$，$AE=AG+EG=2EG+EG=3EG$，并可进一步推得 $DG=DE+EG=AE+EG=3EG+EG=4EG$，所以$\frac{AG}{DG}=\frac{2EG}{4EG}=\frac{1}{2}$.

图 2-4-106

又因为 $FG /\!/ BD$，即 $FG$ 是$\triangle ABD$ 内一条边 $BD$ 的平行线段（图 2-4-106），所以$\frac{AF}{BF}=\frac{AG}{DG}=\frac{1}{2}$，分析得以完成.

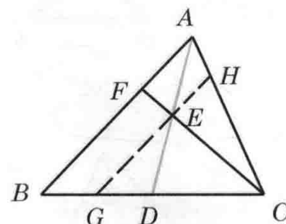


图 2-4-107

(14) 若选取过点 $E$ 作平行线，则过 $E$ 作 $GH /\!/ AB$，分别交 $BC$、$AC$ 于 $G$、$H$（图 2-4-107），可得$\frac{AF}{BF}=\frac{HE}{GE}$，问题就转化为证$\frac{HE}{GE}=\frac{1}{2}$.

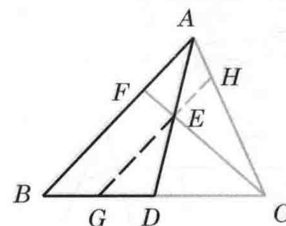


图 2-4-108

由 $AE=DE$，且 $EG /\!/ AB$（图 2-4-108），应用三角形中位线的基本图形的性质，可得 $BG=DG$，$BD=2DG$，$EG=\frac{1}{2}AB$.

因为 $HG /\!/ AB$，即 $HG$ 是$\triangle CAB$ 内一条边 $AB$

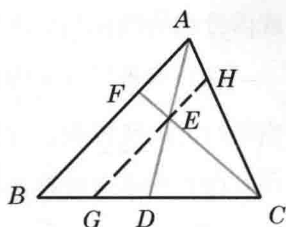


图 2-4-109

的平行线段(图 2-4-109),所以$\triangle CHG$和$\triangle CAB$是一对由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形,可得$\frac{HG}{AB}=\frac{CG}{CB}$.又因为$BD=CD$,所以$CG=CD+DG=BD+DG=2DG+DG=3DG$.而$CB=CD+BD=2BD=2\times 2DG=4DG$,所以$\frac{CG}{CB}=\frac{3DG}{4DG}=\frac{3}{4}$,从而可得$\frac{HG}{AB}=\frac{CG}{CB}=\frac{3}{4}$,$HG=\frac{3}{4}AB$,所以$HE=HG-EG=\frac{3}{4}AB-\frac{1}{2}AB=\frac{1}{4}AB$,$\frac{HE}{GE}=\frac{\frac{1}{4}AB}{\frac{1}{2}AB}=\frac{1}{2}$,从而可证明$\frac{AF}{BF}=\frac{HE}{GE}=\frac{1}{2}$.

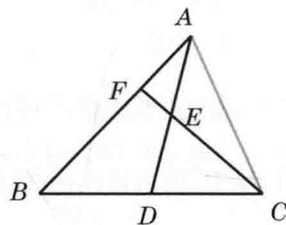


图 2-4-110

(15) 本题的条件中出现的$FC$可以看作是与$\triangle ABD$的两边$AB$、$AD$以及第三边$BD$的延长线相交的直线,可直接应用曼氏定理,得$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BC}{DC}\cdot\frac{DE}{AE}=1$(图 2-4-110).

由条件$AE=DE$,$BD=CD$,即$BC=2CD$,所以$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{2DC}{DC}\cdot\frac{AE}{AE}=1$,从而可以证明$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$.

通过以上讨论,我们可以得到应用平行线型相似三角形的基本图形进行分析的基本步骤:

(1) 发现问题的条件或结论中出现了线段之间的比例关系;

(2) 对线段之间的比例关系进行描图,搞清楚比例线段之间的位置关系;

(3) 当经过描图发现相比两线段重叠在一直线上时,可以确定要应用或添加平行线型相似三角形进行证明;

(4) 确定添加的方法是过端点或内分点作平行线;

(5) 在作平行线时,应首先选取平行方向线段,平行方向线段应从过端点

或内分点的线段当中选取(会出现多种可能性);

(6) 当平行方向线段取在过端点时,平行线过内分点或过另一个端点作;当平行方向线段取在过内分点时,平行线过两个端点作;

(7) 当平行线是过端点或内分点作时,应作到和过另一个端点的直线相交构成平行线型相似三角形的基本图形,当平行线是过两个端点作时,应作到和过内分点的直线相交构成平行线型相似三角形的基本图形.

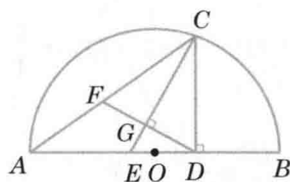


图 2-4-111

【例 5】已知:$C$ 是以 $AB$ 为直径的半圆 $O$ 上的一点,$CD\perp AB$,垂足是 $D$.$E$ 是 $AD$ 上的一点,联结 $AC$、$CE$,$DF\perp CE$,垂足是 $G$,$DF$、$AC$ 相交于 $F$.(图 2-4-111)

求证:$\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{ED}{BD}$.

分析:本题要证明的结论是$\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{ED}{BD}$,这是线段之间的比例关系,首先应进行描图,搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现,$AF$、$CF$ 和 $ED$、$BD$ 这两组相比线段分别重叠在一直线上,可添加平行线型相似三角形进行证明.

由于现在重叠在一直线上的相比线段有两组,因此选取从哪一组相比线段出发进行讨论,就出现了两种可能性.

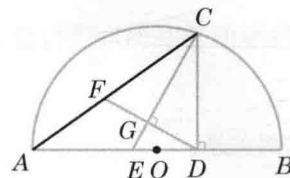


图 2-4-112

若选取从 $AF$、$CF$ 这一组相比线段进行讨论(图 2-4-112),则添加的方法是过端点或内分点作平行线.

于是,首先选取平行方向线段.由于现在出现的端点是 $A$、$C$,内分点是 $F$,所以图形中过端点 $A$ 的线段是 $AE$,过内分点 $F$ 的线段是 $FD$,过另一个端点 $C$ 的线段是 $CD$ 和 $CE$,共有四种情况,可分别进行讨论.

(1) 若取 $AE$ 为平行方向线段(图 2-4-113),由于平行方向线段过端点 $A$,则平行线可以过内分点 $F$ 作,也可以过另一个端点 $C$ 作.

① 若选取过内分点 $F$ 作平行线，则过 $F$ 作 $FH \parallel AE$ 交 $CE$ 于 $H$(图 2 - 4 - 114)，可得$\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{EH}{CH}$.这样，问题就转化为证$\dfrac{EH}{CH}=\dfrac{ED}{BD}$.

这是一个新的比例关系，首先应进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现，$EH$、$CH$ 和 $ED$、$BD$ 这两组相比线段分别重叠在一直线上，可添加平行线型相似三角形进行证明.

又因为这两组重叠的相比线段有一个公共端点 $E$(图 2 - 4 - 115)，所以添加平行线型相似三角形的方法是将端点和端点、内分点和内分点分别联结，这两条连线一定平行.

于是，联结 $DH$、$BC$(图 2 - 4 - 116)，问题就转化为证 $DH \parallel BC$.

由 $AB$ 是半圆 $O$ 的直径，可应用直径的性质，即半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明.于是由 $C$ 是半圆上的一点，可得$\angle ACB=90°$，$AC \perp BC$(图 2 - 4 - 117).这样问题又转化为证 $DH \perp AC$.于是，就要根据垂线的定义进行证明，也就是它们应相交成 90°角.而现在 $DH$、$AC$ 还没有相交，所以应将它们延长到相交，即延长 $DH$ 交 $AC$ 于 $I$(图 2 - 4 - 118).要证 $DI \perp AC$，即证 $DI$ 是$\triangle CDF$ 的一条高，而已知 $CG$ 是$\triangle CDF$ 的一条高，所以它们的交点 $H$ 就应是$\triangle CDF$ 的垂心，问题就转化为证明 $H$ 是$\triangle CDF$ 的垂心.

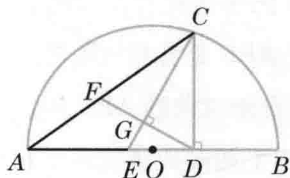


图 2 - 4 - 113

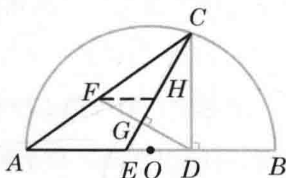


图 2 - 4 - 114

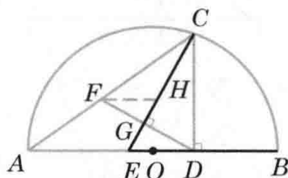


图 2 - 4 - 115

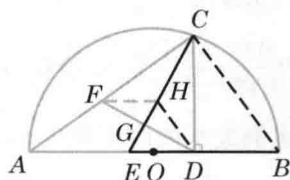


图 2 - 4 - 116

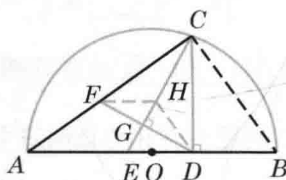


图 2 - 4 - 117

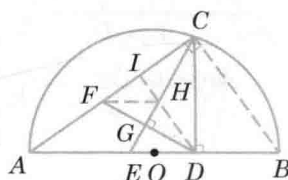


图 2 - 4 - 118

根据三角形垂心的定义，它应该是三角形的两条高的交点，而 $DI$ 这条高是要证明的结论，不能用，必须用另外两条高.其中一条高 $CG$ 已经给出，所以要找另一条 $CD$ 边上的高，但这条高图形中尚未出现，于是应将它添出，即延长 $FH$ 交 $CD$ 于 $J$(图 2 - 4 - 119).

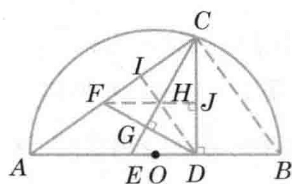


图 2 - 4 - 119

因为 $CD\perp AB$，而已经作出的是 $FH\parallel AE$，所以 $FJ\perp CD$，$FJ$ 就是 $\triangle CDF$ 的一条高，那么 $H$ 就是 $\triangle CDF$ 的垂心，$DH\parallel BC$ 就可以证明，分析也就得以完成.

② 若过另一个端点 $C$ 作平行线，则应作到与过内分点 $F$ 的直线相交.于是过 $C$ 作 $CH\parallel BA$ 交 $DF$ 的延长线于 $H$(图 2 - 4 - 120)，可得 $\triangle ADF\backsim\triangle CHF$，$\frac{AF}{CF}=\frac{AD}{CH}$，这样问题就转化为证明 $\frac{AD}{CH}=\frac{ED}{BD}$.

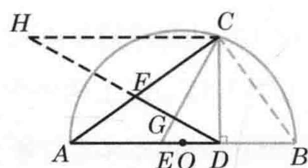


图 2 - 4 - 120

由 $AB$ 是半圆 $O$ 的直径，可应用直径的性质，即半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明.现在图形中有直径 $AB$，有半圆上的点 $C$，而没有圆周角，所以应先将半圆上的圆周角添上.于是联结 $BC$(图 2 - 4 - 121)，可得 $\angle ACB=90°$，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

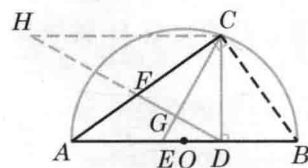


图 2 - 4 - 121

由 $CD\perp AB$，即 $CD$ 是直角三角形 $ABC$ 斜边上的高，可应用直角三角形斜边上的高或者旋转型相似三角形的基本图形进行证明(图 2 - 4 - 122).

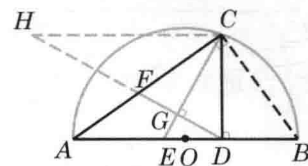


图 2 - 4 - 122

于是，可得 $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$，$CD^2=AD\cdot BD$，而 $AD\cdot BD$ 就是要证明的 $\frac{AD}{CH}=\frac{ED}{BD}$ 的外项积，所以，问题就转化为证明这个比例关系的内项积也等于 $CD^2$，也就是证明 $\frac{CD}{CH}=\frac{ED}{CD}$.

这是一个新的比例关系，首先应进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现，它们两两组成三角形，$CD$、$ED$ 可以组成$\triangle CED$，$CH$、$CD$ 可以组成$\triangle HDC$(图 2-4-123).

在这两个三角形中，已知$\angle CDE=\angle HCD=90^{\circ}$，而由 $DF\perp CE$，可得 $CG$ 是直角三角形 $HDC$ 的斜边上的高，所以$\angle ECD=\angle DHC$(图 2-4-124)，所以$\triangle CED\backsim\triangle HDC$，分析得以完成.

(2) 若取 $FD$ 为平行方向线段(图 2-4-125)，由于平行方向线段过内分点 $F$，则平行线可以过端点 $A$ 作，也可以过另一个端点 $C$ 作.

① 若选取过端点 $A$ 作平行线，则应作到和过另一个端点 $C$ 的直线相交.于是过 $A$ 作 $AH/\!/FD$ 交 $CD$ 的延长线于 $H$(图 2-4-126)，可得$\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{HD}{CD}$，这样问题就转化为证$\dfrac{HD}{CD}=\dfrac{ED}{BD}$.

这是一个新的比例关系，首先要进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现，$HD$、$CD$ 和 $ED$、$BD$ 这两组相比线段分别重叠在一直线上(图 2-4-127)，可添加平行线型相似三角形进行证明.

又因为这两组重叠的相比线段在内分点 $D$ 相交，所以添加平行线型相似三角形的方法是将两组端点分别联结，这两条连线一定平行.

于是联结 $EH$、$BC$(图 2-4-128)，问题就转化为证 $HE/\!/BC$.

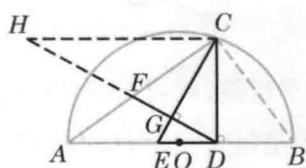



图 2-4-123

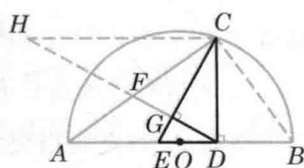



图 2-4-124

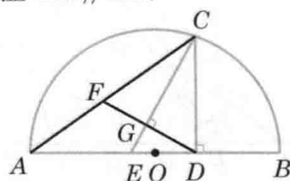



图 2-4-125

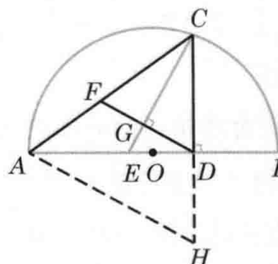



图 2-4-126

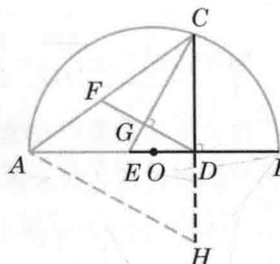



图 2-4-127

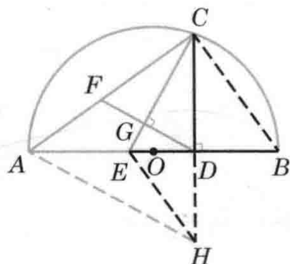



图 2-4-128

由 $AB$ 是半圆 $O$ 的直径，可应用直径的性质，也就是半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 于是由 $C$ 是半圆上的一点，可得 $\angle ACB=90°$，$AC\perp BC$. 这样问题又转化为证 $HE\perp AC$.

于是要根据垂线的定义进行证明，也就是它们应相交成 $90°$ 角，而现在 $HE$、$AC$ 还没有相交，所以应将它们延长到相交，即延长 $HE$ 交 $AC$ 于 $I$. 要证 $HI\perp AC$，即证 $HI$ 是 $\triangle ACH$ 的一条高，而已知 $AD$ 是 $\triangle ACH$ 的一条高，所以它们的交点 $E$ 就应是 $\triangle ACH$ 的垂心，问题就转化为证 $E$ 是 $\triangle ACH$ 的垂心.

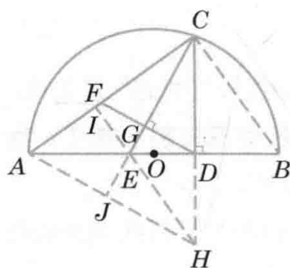


图 2-4-129

根据三角形垂心的定义，$E$ 应该是三角形的两条高的交点，而 $HI$ 这条高是要证明的结论，不能用，必须用另外两条高，其中一条高 $AD$ 已经给出，所以要找另一条 $AH$ 边上的高，但这条高图形中尚未出现，于是应将这条高添出，即延长 $CE$ 交 $AH$ 于 $J$（图 2-4-129）.

由 $CE\perp DF$，而 $AH\parallel FD$，可得 $CJ\perp AH$，$CJ$ 是 $\triangle ACH$ 的一条高，$E$ 是 $\triangle ACH$ 的垂心，$HI\parallel BC$ 就可以证明，分析得以完成.

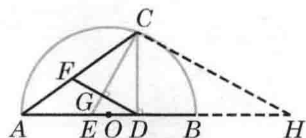


图 2-4-130

② 若选取过端点 $C$ 作平行线，则应作到和过另一个端点 $A$ 的直线相交. 于是过 $C$ 作 $CH\parallel FD$ 交 $AB$ 的延长线于 $H$（图 2-4-130），可得 $\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AD}{HD}$. 这样问题就转化为证 $\dfrac{AD}{HD}=\dfrac{ED}{BD}$.

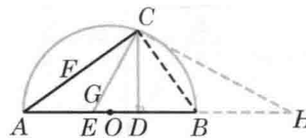


图 2-4-131

由 $AB$ 是半圆 $O$ 的直径，可应用直径的性质，即半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 现在图形中有直径 $AB$，有半圆上的点 $C$，而没有圆周角，所以应先将半圆上的圆周角添上（图 2-4-131）. 于是

联结 BC,可得$\angle ACB=90°$,$\triangle ABC$ 是直角三角形.

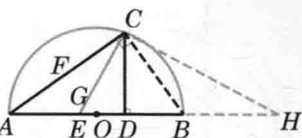


图 2-4-132

由 $CD\perp AB$,即 $CD$ 是直角三角形 $ABC$ 的斜边上的高,可应用直角三角形斜边上的高或者旋转型相似三角形的基本图形进行证明(图 2-4-132).

于是可得$\triangle ACD\backsim\triangle CBD$,$CD^2=AD\cdot BD$,而 $AD\cdot BD$ 就是要证明的$\dfrac{AD}{HD}=\dfrac{ED}{BD}$的外项积,所以问题就转化为证明这个比例关系的内项积也等于 $CD^2$,也就是要证明 $CD^2=ED\cdot HD$.

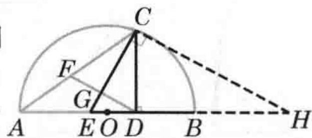


图 2-4-133

由 $CE\perp DF$,而已经作出的是 $CH\parallel FD$,可得$\angle ECH=90°$,从而又出现了 $CD$ 也是直角三角形 $EHC$ 的斜边上的高,所以又想到应用直角三角形斜边上的高或者旋转型相似三角形的基本图形进行证明.

于是可得$\triangle ECD\backsim\triangle CHD$(图 2-4-133),$CD^2=ED\cdot HD$,分析得以完成.

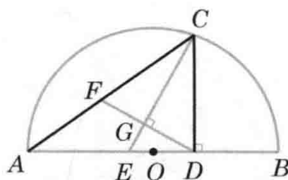


图 2-4-134

(3) 若取 $CD$ 为平行方向线段(图 2-4-134),由于平行方向线段过端点 $C$,则平行线可以过内分点 $F$ 作,也可以过另一个端点 $A$ 作.

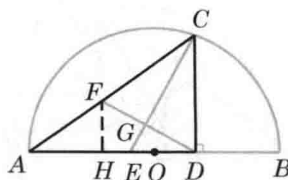


图 2-4-135

① 若选取过内分点 $F$ 作平行线,则应作到和过另一个端点 $A$ 的直线相交.于是过 $F$ 作 $FH\parallel CD$ 交 $AD$ 于 $H$(图 2-4-135),可得$\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AH}{DH}$.这样问题就转化为证$\dfrac{AH}{DH}=\dfrac{ED}{BD}$.

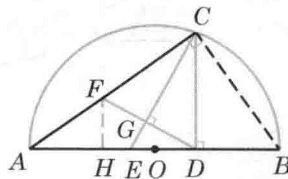


图 2-4-136

由 $AB$ 是半圆 $O$ 的直径,可应用直径的性质,即半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明,现在图形中有直径 $AB$,有半圆上的点 $C$,而没有圆周角,所以应先将半圆上的圆周角添上.于是联结 $BC$(图 2-4-136),可得$\angle ACB=90°$,$\triangle ABC$ 是直角三角形.

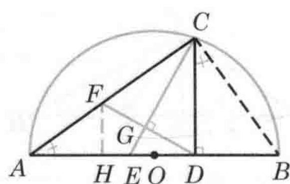


图 2-4-137

由 $CD\perp AB$，出现了 $CD$ 是直角三角形 $ABC$ 斜边上的高，于是应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质（图 2-4-137），可得 $\angle BCD=\angle CAB$. 这样，要证明的性质中出现的 $AH$、$BD$ 就分别是 $\triangle AFH$ 和 $\triangle CBD$ 的一条直角边.

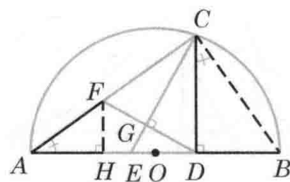


图 2-4-138

在这两个三角形中，由 $CD\perp AB$ 和 $FH\parallel CD$，可得 $\angle AHF=\angle CDB=90^\circ$，所以 $\triangle AFH\backsim\triangle CBD$（图 2-4-138），$\dfrac{AH}{CD}=\dfrac{FH}{BD}$.

比较要证明的 $\dfrac{AH}{DH}=\dfrac{ED}{BD}$，可知问题转化为证 $\dfrac{FH}{DH}=\dfrac{ED}{CD}$.

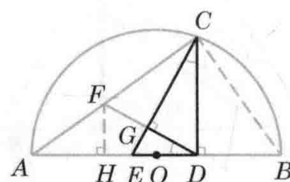


图 2-4-139

由 $DF\perp CE$，垂足是 $G$，$DG$ 也是直角三角形 $CED$ 斜边上的高，所以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质（图 2-4-139），可得 $\angle EDG=\angle ECD$.

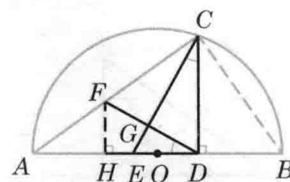


图 2-4-140

又由 $\angle FHD=\angle EDC=90^\circ$，就可以证明 $\triangle FDH\backsim\triangle ECD$（图 2-4-140），所以 $\dfrac{FH}{DH}=\dfrac{ED}{CD}$，分析得以完成.

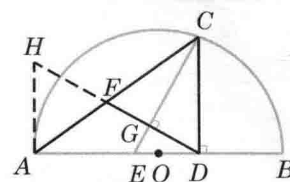


图 2-4-141

② 若选取过端点 $A$ 作平行线，则应作到和过内分点 $F$ 的直线相交. 于是过 $A$ 作 $AH\parallel DC$ 交 $DF$ 的延长线于 $H$（图 2-4-141），可得 $\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AH}{CD}$. 这样问题就转化为证 $\dfrac{AH}{CD}=\dfrac{ED}{BD}$.

因为 $CD\perp AB$，垂足是 $D$，$DF\perp CE$，垂足是 $G$，$DG$ 就是直角三角形 $CED$ 的斜边上的高，所以应用

直角三角形斜边上的高的基本图形的性质(图 2-4-142),可得$\angle EDG=\angle ECD$.

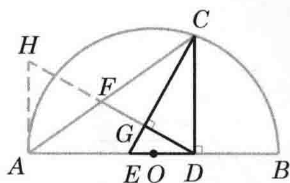


图 2-4-142

又因为$AH/\!/DC$,所以$\angle HAD=\angle EDC=90^\circ$,可推得$\triangle HDA\backsim\triangle ECD$(图 2-4-143),$\dfrac{HA}{AD}=\dfrac{ED}{DC}$.这样问题就转化为证$\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{BD}{DC}$,即$CD^2=AD\cdot BD$.

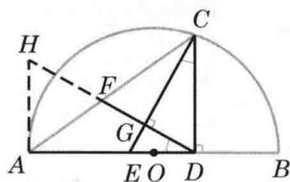


图 2-4-143

由$AB$是半圆$O$的直径,可应用直径的性质,即半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明,现在图形中有直径$AB$,有半圆上的点$C$,而没有圆周角,所以应先将半圆上的圆周角添上.于是联结$BC$,可得$\angle ACB=90^\circ$,$\triangle ABC$是直角三角形.

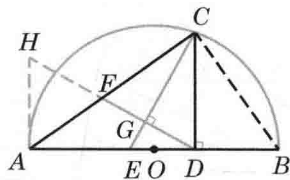


图 2-4-144

由$CD\perp AB$,出现了$CD$是直角三角形$ABC$斜边上的高,可应用直角三角形斜边上的高或者旋转型相似三角形的基本图形进行证明(图 2-4-144).于是可得$\triangle ACD\backsim\triangle CBD$,可以推得$CD^2=AD\cdot BD$,分析得以完成.

(4) 若取$CE$为平行方向线段,由于平行方向线段过端点$C$,则平行线可以过另一个端点$A$作,并应作到和过内分点$F$的直线相交.于是过$A$作$AH/\!/EC$交$DF$的延长线于$H$(图 2-4-145),就可得$\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AH}{CG}$.这样问题就转化为证$\dfrac{AH}{CG}=\dfrac{ED}{BD}$.

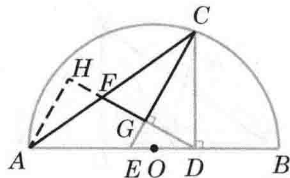


图 2-4-145

而由$AH/\!/EC$,即$EG$是$\triangle DAH$内一条边$AH$的平行线(图 2-4-146),可应用由三角形内一条边的平行线得到的平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明.于是可得$\dfrac{AH}{EG}=\dfrac{AD}{ED}$,$AH=\dfrac{AD\cdot EG}{ED}$.问题就

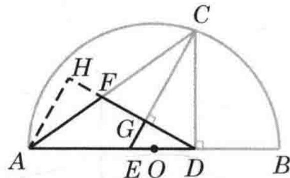


图 2-4-146

转化为证$\frac{AD \cdot EG}{ED}=\frac{ED \cdot CG}{BD}$.

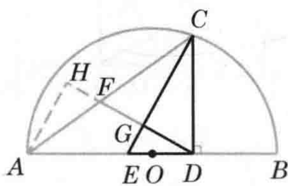


图 2-4-147

这个关系式中出现了 $ED^2$，是直角三角形一条直角边的平方，于是由 $CD \perp AB$，垂足是 $D$，$DF \perp CE$，垂足是 $G$，可得 $DG$ 是直角三角形 $CED$ 斜边上的高，所以可应用直角三角形斜边上的高也就是逆平行线型相似三角形的基本图形的性质(图 2-4-147)，可得$\triangle EDG \backsim \triangle ECD$，$ED^2=EG \cdot EC$，问题又转化为证明 $EG \cdot EC \cdot CG=AD \cdot EG \cdot BD$，即证明 $EC \cdot CG=AD \cdot BD$.

由 $DG$ 是直角三角形 $CED$ 斜边上的高，于是应用直角三角形斜边上的高也就是逆平行线型相似三角形的基本图形的性质，可得$\triangle CDG \backsim \triangle CED$，$CD^2=EC \cdot CG$，所以问题转化为证$CD^2=AD \cdot BD$.

由 $AB$ 是半圆 $O$ 的直径，可应用直径的性质，即半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明，现在图形中有直径 $AB$，有半圆上的点 $C$，而没有圆周角，所以应先将半圆上的圆周角添上. 于是联结 $BC$，可得$\angle ACB=90°$，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

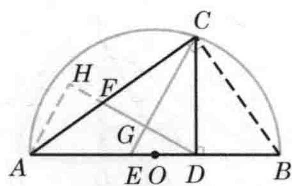


图 2-4-148

由 $CD \perp AB$，即 $CD$ 是直角三角形 $ABC$ 斜边上的高，可应用直角三角形斜边上的高即旋转型相似三角形的基本图形进行证明(图 2-4-148). 于是可得$\triangle ACD \backsim \triangle CBD$，可以推得 $CD^2=AD \cdot BD$，分析就得以完成.

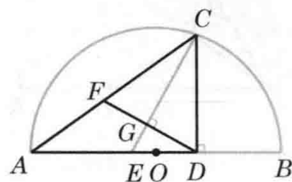


图 2-4-149

(5) 在对比例线段进行描图时，可以发现 $AF$、$CF$ 这一组相比(相等)线段重叠在一直线上，且过两个端点 $A$、$C$ 和内分点 $F$ 的三直线 $AD$、$CD$、$FD$ 共点于 $D$(图 2-4-149)，从而可添加平行线型相似三角

形的组合图形进行证明.添加的方法是将过端点和内分点的共点三直线与一组平行线相交.

由于现在图形中没有平行线,因此应将平行线添上,又因为现在图形中能够作 $AC$ 的平行线而且与条件、结论有联系的点是点 $E$,所以平行线应过点 $E$ 作,也就是过 $E$ 作 $EH /\!/ AC$,分别交 $CD$、$FD$ 于 $H$、$I$(图 2-4-150),从而可得$\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{EI}{HI}$.这样问题就转化为证$\dfrac{EI}{HI}=\dfrac{ED}{BD}$.

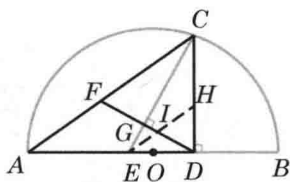


图 2-4-150

这是一个新的比例关系,首先应进行描图,搞清楚比例线段之间的位置关系.

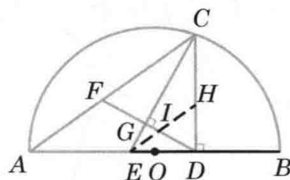


图 2-4-151

经过描图可以发现,$EI$、$HI$ 和 $ED$、$BD$ 这两组相比线段分别重叠在一直线上(图 2-4-151),可添加平行线型相似三角形进行证明.因为这两组重叠的相比线段有公共端点 $E$,所以添加平行线型相似三角形的方法是将端点和端点、内分点和内分点分别联结,这两条连线一定平行.于是联结 $BH$(图 2-4-152),问题就转化为证 $DI /\!/ BH$.

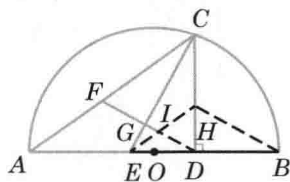


图 2-4-152

由 $CE \perp DF$,问题就转化为证 $BH \perp CE$.

根据垂线的定义,它们应相交成 $90^\circ$ 角,而现在 $BH$、$CE$ 还没有相交,于是应将它们延长到相交,也就是延长 $BH$ 交 $CE$ 于 $J$,证 $BJ \perp CE$.

由 $AB$ 是半圆 $O$ 的直径,可应用直径的性质,即半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明,现在图形中出现了 $C$ 是半圆上的一点,而没有圆周角,于是应将圆周角添上,也就是联结 $BC$,可得 $\angle ACB=90^\circ$.

这样要证 $BJ \perp CE$，也就是证 $BJ$ 是$\triangle CEB$ 内的一条高，而已知 $CD$ 是$\triangle CEB$ 的一条高，所以它们的交点 $H$ 就应是$\triangle CEB$ 的垂心，这样问题就转化为证 $H$ 是$\triangle CEB$ 的垂心.

根据三角形垂心的定义，$H$ 应该是三角形的两条高的交点，而 $BJ$ 这条高是要证明的结论，不能用，必须用另外两条高，其中一条高 $CD$ 已经给出，所以要找另一条 $BC$ 边上的高，但这条高图形中尚未出现，于是应先将这条高添出，即延长 $EH$ 交$BC$ 于$K$(图 2-4-153).

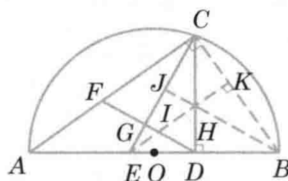


图 2-4-153

由于已经作出 $EH \parallel AC$，$AC \perp BC$，因此 $EK \perp BC$，$EK$ 就是$\triangle CEB$ 的一条高，于是 $H$ 就是$\triangle CEB$ 的垂心，$BH \parallel DI$ 就可以证明，分析也就得以完成.

比较一下例 5 和例 4 可以发现，尽管这是两个并不相同的题目，但是在应用平行线型相似三角形的基本图形进行分析思考的部分却是完全相同的，甚至连分析所使用的语言(除了一些字母不同)都是相同的，这就体现了分析方法和思想方法的规律性.

(三) 平行线型的组合图形

$\triangle ABC$ 中，$D$ 是 $AB$ 上的一点，$E$ 是 $AC$ 上的一点，$DE \parallel BC$，$F$ 是 $BC$ 上的一点，$AF$ 交 $DE$ 于 $G \Rightarrow \triangle ADG \backsim \triangle ABF$，$\triangle AEG \backsim \triangle ACF$，$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，$\dfrac{DG}{BF}=\dfrac{AG}{AF}=\dfrac{EG}{CF}$(图 2-4-154)

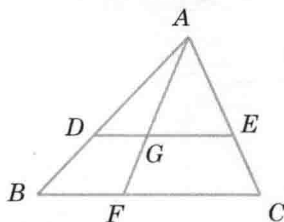


图 2-4-154

在几何问题中，当出现了相比或相等两线段重叠在一组平行线段上时，可以应用或添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明.添加的方法是将过端点

和内分点的共点三直线与这组平行线相交，组成平行线型相似三角形的组合图形.

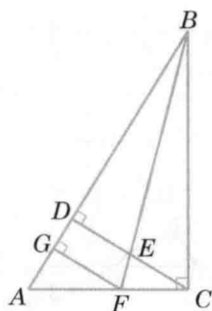


图 2-4-155

【例 6】已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足是 $D$，$E$ 是 $CD$ 的中点，延长 $BE$ 交 $AC$ 于 $F$，$FG\perp AB$，垂足是 $G$.(图 2-4-155)

求证：$FG^2=FA\cdot FC$.

分析：本题的条件中给出 $CD\perp AB$，$FG\perp AB$，可得 $CD/\!/FG$(图 2-4-156).又因为 $CE=DE$，这样就出现了相等两线段重叠在一组平行线段上，且过端点 $D$、$C$ 和内分点 $E$ 的三直线 $DB$、$CB$、$EB$ 共点于 $B$(图 2-4-157)，于是可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明.添加的方法是将共点的三直线与这一组平行线相交，由于现在图形中 $BC$ 和 $GF$ 尚未相交，所以应先将它们延长到相交.也就是延长 $GF$ 交 $BC$ 的延长线于 $H$(图 2-4-158).可得$\dfrac{DE}{CE}=\dfrac{GF}{HF}$.而已知 $DE=CE$，所以 $FG=FH$.

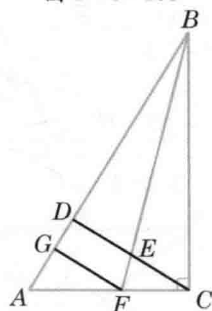


图 2-4-156

由于要证明的结论是 $FG^2=FA\cdot FC$，所以问题转化为证明 $FG\cdot FH=FA\cdot FC$.

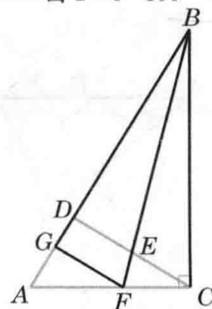


图 2-4-157

这是一个新的比例关系式，经过描图，可以发现这两组相乘线段 $FG$、$FH$ 和 $FA$、$FC$ 分别重叠在一直线上，于是可应用逆平行线型相似三角形进行证明.

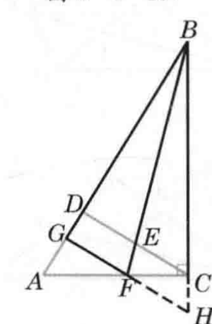


图 2-4-158

由于这两组相乘线段在内分点 $F$ 相交，因此可应用由三角形外一条边的逆平行线型相似三角形进行证明，从而应证 $\triangle AFG$ 和 $\triangle HFC$ 相似(图 2-4-

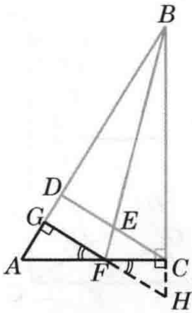


图 2-4-159

159).由 $AC$、$GH$ 相交于 $F$,可得 $\angle AFG=\angle HFC$,又因为 $\angle AGF=\angle HCF=90°$,所以 $\triangle AFG$ 和 $\triangle HFC$ 相似就可以证明,分析得以完成.

【例 7】已知:平行四边形 $ABCD$ 中,$E$ 是 $AD$ 的中点,$F$ 是 $CD$ 的中点,$AC$ 分别交 $BE$、$BF$ 于 $G$、$H$.(图 2-4-160)

求证:$AG=GH=HC$.

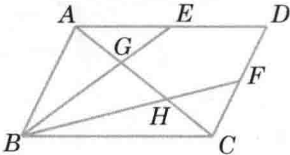


图 2-4-160

分析:本题的条件中给出 $E$ 是 $AD$ 的中点,$F$ 是 $CD$ 的中点,这样就出现了两个中点,是多个中点问题,可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明.

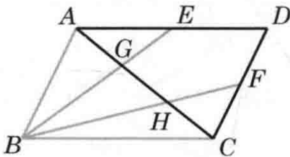


图 2-4-161

由于 $E$、$F$ 所在的线段 $AD$、$CD$ 具有公共端点 $D$,可以组成三角形,因此 $EF$ 这两个中点的连线就是三角形的中位线(图 2-4-161),而现在图形中有三角形而没有中位线,于是应先将中位线添上,即联结 $EF$,可得 $EF \parallel AC$(图 2-4-162).

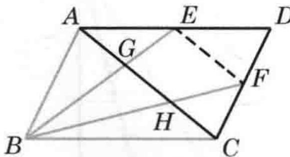


图 2-4-162

而本题要证明的结论是 $AG=GH=HC$,这样就出现了相等的两线段 $GH$、$HC$ 是重叠在一组平行线段上,且过端点 $G$、$C$ 和内分点 $H$ 的三直线 $EB$、$CB$ 和 $FB$ 共点于 $B$(图 2-4-163),于是可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明.添加的方法是将共点的三直线与这一组平行线相交,由于现在图形中 $BC$ 尚未与 $EF$ 相交,因此应先将它们延长到相交.于是延长 $EF$ 交 $BC$ 的延长线于 $I$(图 2-4-164),可得 $\frac{GH}{CH}=\frac{EF}{IF}$.这样问题就转化为证 $EF=IF$.

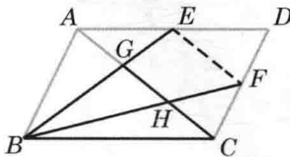


图 2-4-163

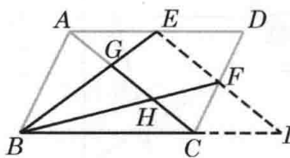


图 2-4-164

又因为 $F$ 是 $CD$ 的中点,且 $EI$、$DC$ 相交于 $F$,这样就出现了两组相等线段 $DF$、$CF$ 和 $EF$、$IF$ 都位于一组对顶角的两边而且成一直线,所以可应用中心对

称型全等三角形进行证明.根据将四个端点两两联结起来得到中心对称型全等三角形的方法,可找到这对全等三角形是$\triangle DFE$和$\triangle CFI$(图2-4-165).

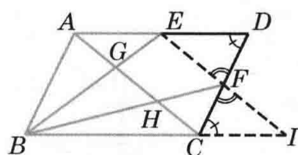


图2-4-165

由于已经有$DF=CF$,$\angle DFE=\angle CFI$,因此还要证明一个性质.由四边形$ABCD$是平行四边形,可得$AD\parallel BC$,也就可得$\angle EDF=\angle ICF$,所以$EF=IF$就可以证明,即得$GH=HC$.

根据同样的道理,延长$FE$交$BA$的延长线于$J$后,又可证明$AG=GH$,分析就得以完成.

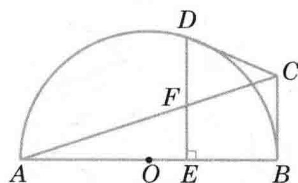


图2-4-166

【例8】已知:$AB$是半圆$O$的直径,$CB$与半圆$O$相切于$B$,$CD$与半圆$O$相切于$D$,$DE\perp AB$,垂足是$E$,$AC$、$DE$相交于$F$.(图2-4-166)

求证:$DF=EF$.

分析:本题条件中给出了$AB$是半圆$O$的直径,于是可应用直径的性质,即半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明.现在图形中出现了$D$是半圆上的一点,而没有圆周角,应将圆周角添上,于是联结$AD$、$BD$(图2-4-167),可得$\angle ADB=90°$.

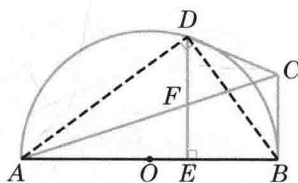


图2-4-167

又因为$CB$与半圆$O$相切于$B$,所以想到要应用切线的性质或者弦切角的基本图形的性质进行证明,可得$\angle ABC=90°$(图2-4-168).又因为$DE\perp AB$,所以$DE\parallel CB$.

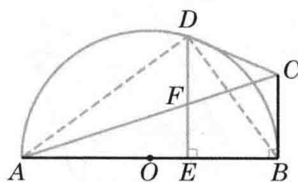


图2-4-168

本题要证明的结论是$DF=EF$,这样要证明相等的两条线段$DF$、$EF$就重叠在一组平行线段上,且过端点$D$、$E$和内分点$F$的三直线$DA$、$EA$和$FA$共点于$A$(图2-4-169),可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明.添加的方法是将共点的三直线与这一组平行线相交,由于现在图形中$AD$尚未与$BC$

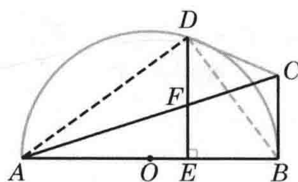


图2-4-169

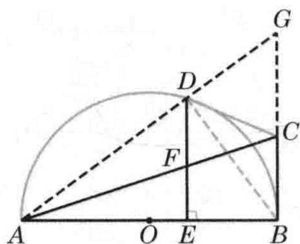


图 2-4-170

相交，因此应将它们延长到相交，于是延长 $AD$ 交 $BC$ 的延长线于 $G$（图 2-4-170），可得 $\frac{DF}{EF}=\frac{GC}{BC}$. 这样问题就转化为证 $GC=BC$.

由 $CB$ 与半圆 $O$ 相切于 $B$，$CD$ 与半圆 $O$ 相切于 $D$，可得 $CD=CB$，$\triangle CDB$ 是等腰三角形（图 2-4-171）. 又因为 $\angle ADB=90^\circ$，$A$、$D$、$G$ 成一直线，所以 $\angle GDB=90^\circ$.

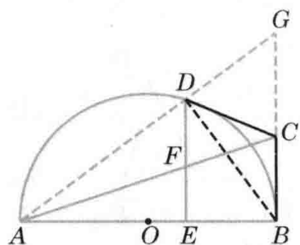


图 2-4-171

那么在直角三角形 $BGD$ 中，应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质，由 $CD=CB$，可推得 $CD=CG$（图 2-4-172），所以 $GC=BC$，分析就得以完成.

如果需要集中进行这类基本图形的教学，可以在《几何王》软件的“智能搜索”功能中，选择左边栏筛选条件中的“基本图形”，鼠标依次悬停在“相似三角形”→“平行线型”，最后点击“平行线型相似三角形的组合图形”，就可以将所有有关平行线型相似三角形的组合图形的习题全部搜索出来.

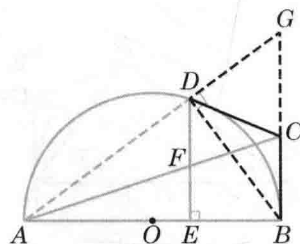


图 2-4-172

（四）三角形的中位线

$\triangle ABC$ 中，$AD=BD$，$AE=CE \Rightarrow DE \parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$（图 2-4-173）

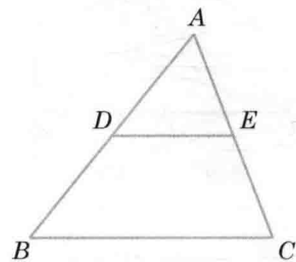


图 2-4-173

在几何问题中，出现了多个中点（两个或两个以上中点）问题时，可以应用或添加三角形中位线的基本图形进行证明.

当两个已知中点所在的线段具有公共端点，可以组成三角形时，这两个中点的连线就是三角形的中位线. 如果图形中有三角形而没有中位线，就应将中位线添上；如果有中位线而三角形不完整，就应将三角形

的边添上.

当两个已知中点所在的线段没有公共端点,不能组成三角形时,这两个中点的连线就不是三角形的中位线,这时就要增加中点,且应增加和已知中点所在的线段有公共端点的线段的中点.

在几何问题中,出现了两条线段之间的倍半关系,且这一倍半关系是和线段的中点发生联系时,可以应用或添加三角形中位线的基本图形进行证明.添加的方法是:若将倍线段取作三角形的边,则添加三角形中与这条边相对应的中位线;若将半线段取作三角形的中位线,则使这条线段的两个端点成为两条具有公共端点的线段的中点,并将三角形添完整.

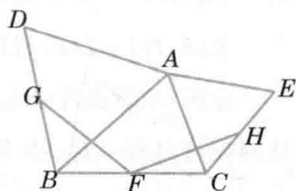


图 2-4-174

【例 9】已知:$\triangle ABC$ 中,以 $AB$ 为边在 $\triangle ABC$ 外作等边三角形 $ABD$,以 $AC$ 为边在 $\triangle ABC$ 外作等边三角形 $ACE$,$F$ 是 $BC$ 的中点,$G$ 是 $BD$ 的中点,$H$ 是 $CE$ 的中点,联结 $FG$、$FH$.(图 2-4-174)

求证:$FG=FH$.

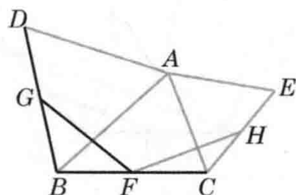


图 2-4-175

分析:本题条件中给出 $F$、$G$、$H$ 分别是 $BC$、$BD$、$CE$ 的中点,这样就出现了多个中点,是多个中点问题,可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明.

由于 $F$、$G$ 所在的线段 $BC$、$BD$ 具有公共端点 $B$(图 2-4-175),可以组成三角形,因此 $FG$ 这两个中点的连线就是三角形的中位线.现在图形中有中位线而三角形不完整,所以应将三角形的边添上.于是联结 $CD$,可得 $CD=2FG$(图 2-4-176).

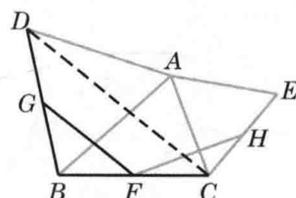


图 2-4-176

根据同样的道理，联结 $BE$ 后，可得 $BE=2FH$（图 2－4－177）.

这样问题就转化为证明 $BE=DC$.由于$\triangle ABD$ 和$\triangle ACE$ 都是等边三角形，即出现了两个具有公共顶点 $A$ 的等边三角形，因此必定出现一对旋转型全等三角形.

根据由公共顶点 $A$ 发出的两组相等线段 $AD$、$AB$ 和 $AC$、$AE$ 两两组成旋转型全等三角形的方法（图 2－4－178），可找到这对全等三角形应是$\triangle ADC$ 和$\triangle ABE$（图 2－4－179）.全等的条件是 $AD=AB$，$AC=AE$，它们的夹角$\angle DAC$ 和$\angle BAE$ 都等于旋转角 60°加上公共部分$\angle BAC$，所以 $DC=BE$ 得以证明.

【例 10】已知：$\triangle ABC$ 中，以 $AB$ 为边向$\triangle ABC$ 外作正方形 $AEDB$，以 $AC$ 为边向$\triangle ABC$ 外作正方形 $ACFG$，$H$ 是 $BC$ 的中点，$I$ 是 $BE$ 的中点，$J$ 是 $CG$ 的中点，联结 $HI$、$HJ$.（图 2－4－180）

求证：$HI=HJ$，$HI\perp HJ$.

分析：本题条件中出现了两个以 $A$ 为公共顶点的正方形 $AEDB$ 和 $ACFG$，从而就可出现一对旋转型全等三角形，根据由公共顶点 $A$ 发出的两组相等线段 $AB$、$AE$ 和 $AG$、$AC$ 两两组成全等三角形的方法（图 2－4－181），可以找到这对全等三角形应是$\triangle ACE$ 和$\triangle AGB$（图 2－4－182）.

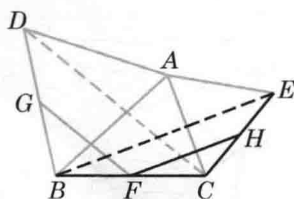


图 2－4－177

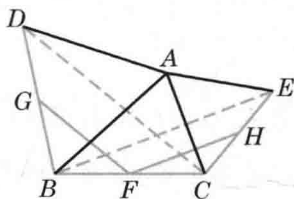


图 2－4－178

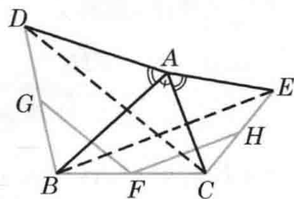


图 2－4－179

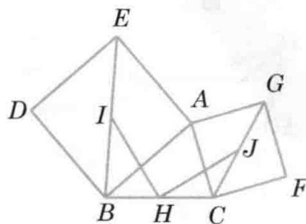


图 2－4－180

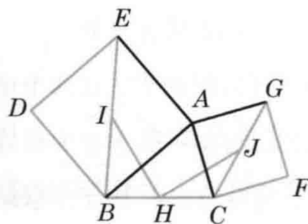


图 2－4－181

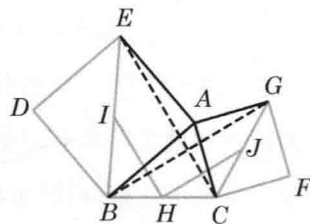


图 2－4－182

于是联结 $CE$、$GB$，由 $AE=AB$，$AC=AG$，$\angle EAC$ 和 $\angle BAG$ 都等于旋转角 $90^\circ$ 加上公共部分 $\angle BAC$，就可以证明这两个三角形全等，就可得 $CE=GB$.

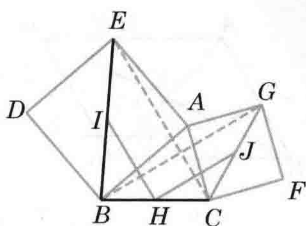


图 2-4-183

我们要证明的性质是 $HI=HJ$，而已知 $I$、$H$、$J$ 分别是 $BE$、$BC$、$CG$ 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明.

因为 $I$、$H$ 所在的线段 $BE$、$BC$ 有公共的端点 $B$（图 2-4-183），可以组成三角形，所以 $HI$ 就是 $\triangle BCE$ 的一条中位线（图 2-4-184），于是可得 $HI\parallel CE$，$HI=\frac{1}{2}CE$.

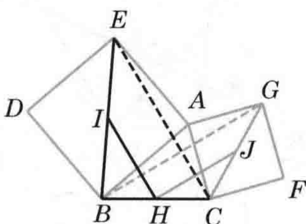


图 2-4-184

根据同样的道理，又可证得 $HJ\parallel BG$，$HJ=\frac{1}{2}BG$（图 2-4-185），而已经证得 $CE=BG$，所以 $HI=HJ$ 就得以证明.

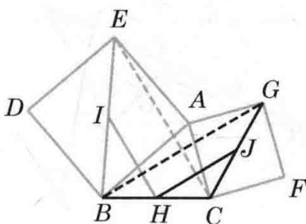


图 2-4-185

由于 $\triangle ACE$ 和 $\triangle AGB$ 是一对绕 $\triangle ABC$ 的顶点 $A$ 旋转 $90^\circ$ 的全等三角形，所以又可证明 $CE\perp BG$，而已证 $HI\parallel CE$，$HJ\parallel BG$，可推得 $HI\perp HJ$.

【例 11】已知：平行四边形 $ABCD$ 中，$BD=2AB$，$AC$、$BD$ 相交于 $E$，$F$ 是 $BE$ 的中点，$G$ 是 $CE$ 的中点，$H$ 是 $AD$ 的中点，联结 $FG$、$HG$.（图 2-4-186）

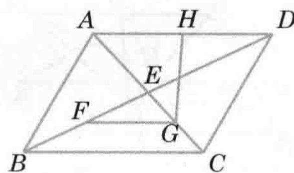


图 2-4-186

求证：$FG=HG$.

分析：本题的条件中给出四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB=CD$（图 2-4-187）. 又因为 $BD=2AB$，所以 $BD=2CD$. 又由 $AC$、$BD$ 相交于 $E$，应用平行四边形的性质，又可得 $BE=DE$，从而 $BD=2DE$（图 2-4-188）. 所以 $DE=DC$. 这是两条具有公

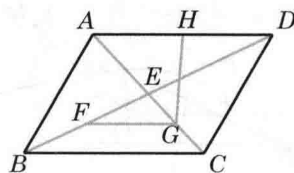


图 2-4-187

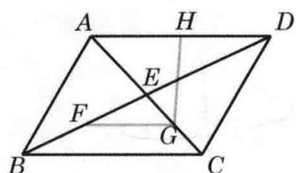


图 2-4-188

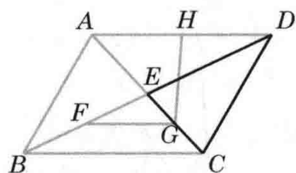


图 2-4-189

共端点 $D$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形(图 2-4-189). 又因为 $G$ 是 $CE$ 的中点，出现了这个等腰三角形底边的中点，所以可应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质进行证明. 由于图形中这条重要线段尚未出现，应将它添上，于是联结 $DG$，可推得 $DG \perp EC$(图 2-4-190)，即$\angle DGA=90°$.

由 $H$ 是 $AD$ 的中点，出现了 $H$ 是直角三角形 $ADG$ 的斜边 $AD$ 的中点，从而可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明，于是可得 $HG=\frac{1}{2}AD$(图 2-4-191).

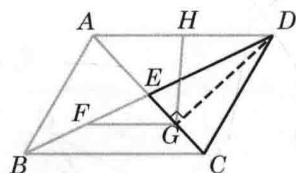


图 2-4-190

又因为 $F$、$G$ 是 $BE$、$CE$ 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 $F$、$G$ 所在的线段 $BE$、$CE$ 具有公共的端点 $E$，可以组成三角形，因此 $FG$ 是三角形的中位线(图 2-4-192)，从而可得 $FG=\frac{1}{2}BC$.

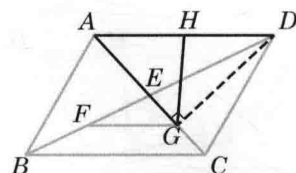


图 2-4-191

又因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，应用平行四边形的性质，可得 $BC=AD$，所以 $FG=HG$ 就得以证明.

【例 12】已知：四边形 $ABCD$ 中，$AB=DC$，$E$ 是 $AD$ 的中点，$F$ 是 $BC$ 的中点，$BA$、$FE$ 的延长线相交于 $G$，$CD$、$FE$ 的延长线相交于 $H$.(图 2-4-193)

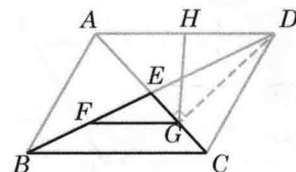


图 2-4-192

求证：$\angle BGF=\angle CHF$.

分析：本题条件中给出 $E$ 是 $AD$ 的中点，$F$ 是 $BC$ 的中点，出现了两个中点，是多个中点问题(图 2-4-194)，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进

行证明.

由于 $E$、$F$ 这两个中点所在的线段 $AD$、$BC$ 没有公共端点,不能组成三角形,因此这两个中点的连线 $EF$ 就不是三角形的中位线,这时就要增加中点,且要增加和已知中点所在的线段有公共端点的线段的中点.

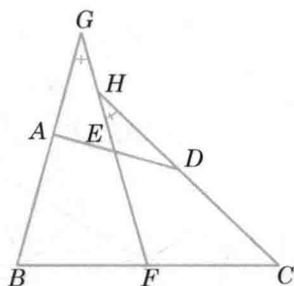


图 2-4-193

由于 $E$、$F$ 所在的线段 $AD$、$BC$ 的端点是四边形的顶点,因此要同时与这两条线段有公共端点的线段,就是四边形的对角线,也就是应增加四边形的对角线的中点.于是联结 $BD$(或 $AC$),取 $BD$(或 $AC$)的中点 $I$(图 2-4-195).

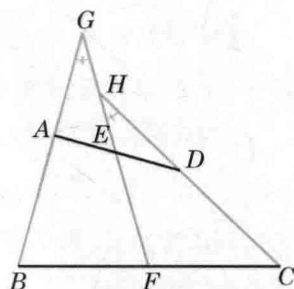
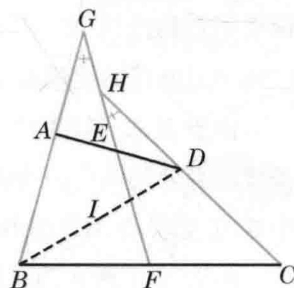


图 2-4-194

因为 $E$、$I$ 所在的线段 $AD$、$BD$ 具有公共端点 $D$,可以组成三角形,所以 $E$、$I$ 这两个中点的连线就是三角形的中位线.

现在图形中有三角形而没有中位线,应将中位线添上.于是联结 $EI$,可得 $EI /\!/ AB$,$EI=\dfrac{1}{2}AB$(图 2-4-196).所以又可进一步推得 $\angle BGF=\angle IEF$.




同理,$F$、$I$ 所在的线段 $BC$、$BD$ 具有公共端点 $B$,可以组成三角形,所以 $FI$ 这两个中点的连线就是三角形的中位线.于是联结 $FI$,可得 $FI /\!/ CD$,$FI=\dfrac{1}{2}CD$,$\angle IFE=\angle CHF$(图 2-4-197).那么问题就转化为证明 $\angle IEF=\angle IFE$.

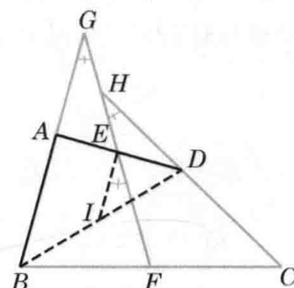


图 2-4-196

由 $AB=DC$,可得 $EI=FI$.这是两条具有公共端点 $I$ 的相等线段,它们可以组成一个等腰三角形的基本图形(图 2-4-198),所以应用等腰三角形的性质就可以证明 $\angle IEF=\angle IFE$,分析就得以完成.

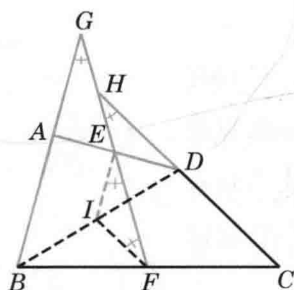


图 2-4-197

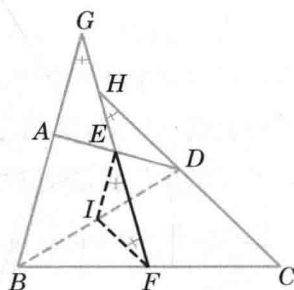


图 2-4-198

【例 13】已知：四边形 $ABCD$ 中，分别以四条边为边向四边形外作正方形，$E$、$F$、$G$、$H$ 依次是这四个正方形的中心，联结 $EG$、$FH$.（图 2-4-199）

求证：$EG=FH$，$EG\perp FH$.

分析：本题条件中给出了四个正方形的中心，而正方形的中心就是正方形对角线的中点，出现了多个中点（图 2-4-200），可以应用或添加三角形中位线的基本图形进行证明.

由于 $E$、$G$ 这两个中点所在的线段没有公共端点，不能组成三角形，因此这两个中点的连线 $EG$ 不是三角形的中位线，这时就要增加中点，而且要增加和已知中点所在的线段有公共端点的线段的中点.

由于 $E$、$G$ 所在的线段的端点各有一个是四边形的顶点，因此同时与这两条线段有公共端点的线段，就是四边形的对角线，即应增加四边形的对角线的中点.于是联结 $AC$（或 $BD$），取 $AC$（或 $BD$）的中点 $I$（图 2-4-201）.

由于 $E$、$I$ 所在的线段有公共端点 $A$，可以组成三角形，因此 $E$、$I$ 这两个中点的连线就是三角形的中位线.现在图形中三角形还不完整，中位线还没有出现，

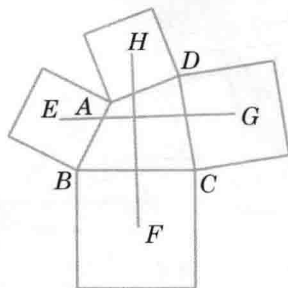


图 2-4-199

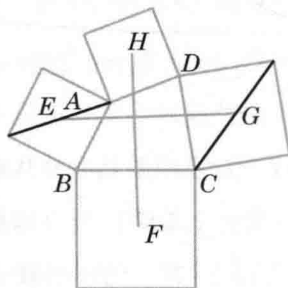


图 2-4-200

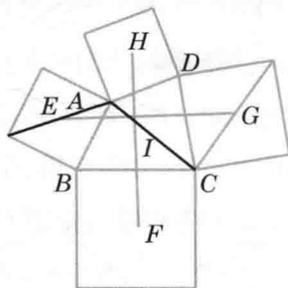


图 2-4-201

应将它们分别添上. 于是联结 $EI$、$JC$，可得 $EI /\!/ JC$，$EI=\frac{1}{2}JC$（图 2-4-202）. 同理，联结 $FI$、$KA$，可得 $FI /\!/ KA$，$FI=\frac{1}{2}KA$（图 2-4-203）.

以 $E$、$F$ 为中心的两个正方形以 $B$ 为公共顶点，出现了一对旋转型全等三角形. 根据由公共顶点发出的两组相等线段 $BJ$、$BA$ 和 $BC$、$BK$ 两两组成全等三角形的方法（图 2-4-204），就能找到这对全等三角形应是$\triangle BJC$ 和$\triangle BAK$（图 2-4-205），全等的条件是 $BJ=BA$，$BC=BK$，$\angle JBC$ 和$\angle ABK$ 都等于旋转角 90°加上公共部分$\angle ABC$.

从而可得 $JC=KA$，$JC\perp KA$，进一步可推得 $EI=FI$，$EI\perp FI$（图 2-4-206），它们可以构成一个等腰直角三角形，也就是半个正方形.

同理，联结 $GI$、$HI$，可得 $GI=HI$，$GI\perp HI$，它们也可以构成一个等腰直角三角形，也就是半个正方形（图 2-4-207）.

这样，相当于出现了两个以 $I$ 为公共顶点的正方形，所以出现了一对旋转型

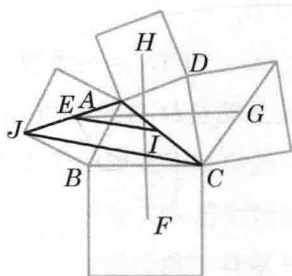


图 2-4-202

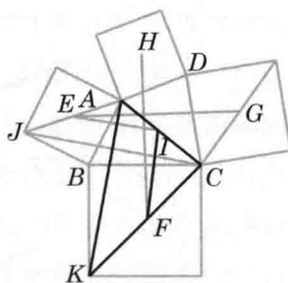


图 2-4-203

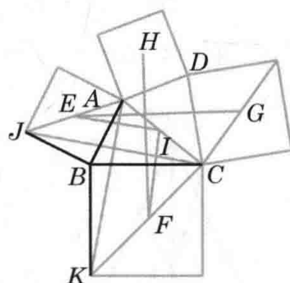


图 2-4-204

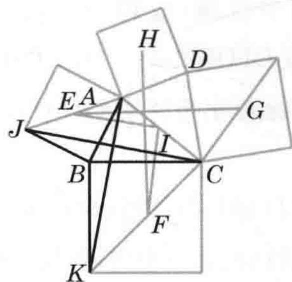


图 2-4-205

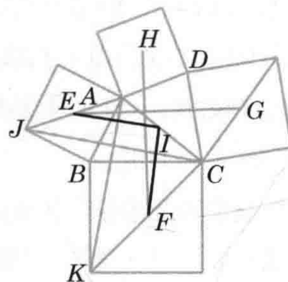


图 2-4-206

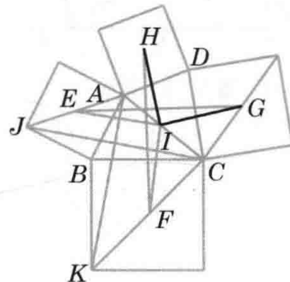


图 2-4-207

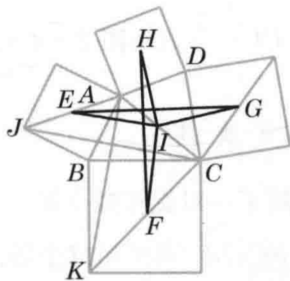


图 2-4-208

全等三角形.根据由公共顶点发出的两组相等线段 $EI$、$FI$ 和 $GI$、$HI$ 两两组成全等三角形的方法,就能找到这对全等三角形是 $\triangle EGI$ 和 $\triangle FHI$(图 2-4-208),全等的条件是 $EI=FI$,$GI=HI$,$\angle EIG$ 和 $\angle FIH$ 都等于旋转角 $90^\circ$ 加上公共部分 $\angle EIH$.从而就可证明 $EG=FH$,$EG\perp FH$.

【例 14】 已知:$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$AD\perp BC$,垂足是 $D$,$E$ 是 $AD$ 上的一点,$EB=EA$,$CF\perp AB$,垂足是 $F$,$CF$、$BE$ 相交于 $G$,$CF$、$DE$ 相交于 $H$.(图 2-4-209)

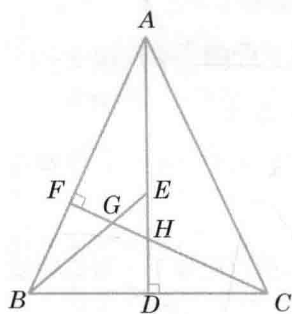


图 2-4-209

求证:$BG=2DH$.

分析:本题的条件中给出 $AB=AC$,$AD\perp BC$,垂足是 $D$,出现了等腰三角形底边上的高(图 2-4-210),可应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质进行证明,于是可得 $BD=CD$.

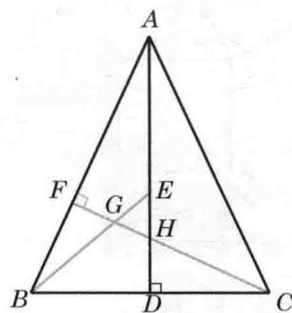


图 2-4-210

(1) 本题要证明的结论 $BG=2DH$ 是两条线段之间的倍半关系,而其中 $DH$ 的端点 $D$ 是线段 $BC$ 的中点,所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明.应用的方法可以是将倍线段 $BG$ 取作三角形的边,也可以是将半线段 $DH$ 取作三角形的中位线.

① 若选取将倍线段 $BG$ 取作三角形的边(图 2-4-211),则有三角形而没有中位线,应将中位线添上.于是取 $CG$ 的中点 $I$,联结 $DI$(图 2-4-212).可得 $DI\parallel BG$,$BG=2DI$.于是问题转化为证明 $DH=DI$(图 2-4-213).

这是两条具有公共端点 $D$ 的相等线段,它们可以组成一个等腰三角形,问题就转化为一个等腰三角形的判定问题,即证 $\angle DHI=\angle DIH$.

由 $CF\perp AB$,$AD\perp BC$,可得 $\angle HFB=\angle HDB=$

$90°$，所以 $H$、$F$、$B$、$D$ 四点共圆，又由 $F$、$H$、$C$ 成一直线，可得$\angle DHI=\angle FBD$.

这样问题就转化为证明$\angle DIH=\angle FBD$.又因为 $H$、$I$、$C$ 成一直线，所以$\angle DIH$ 就是$\triangle DCI$ 的一个外角，从而可推得$\angle DIH=\angle IDC+\angle ICD$.

而由 $DI\parallel BG$，这两条平行线可以看作被 $BC$ 所截，可得$\angle IDC=\angle EBC$.因为 $CF\perp AB$，$AD\perp BC$，所以$\angle ICD=\angle DAF$.又由 $EB=EA$，即这是两条具有公共端点 $E$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，应用等腰三角形的性质，可得$\angle EAB=\angle EBA$（图 2-4-214).而$\angle FBD=\angle EBA+\angle EBC$，所以$\angle DIH=\angle FBD$ 就得以证明.

② 若选取将半线段 $DH$ 取作三角形的中位线(图 2-4-215)，则有三角形的中位线，而三角形不完整，应将三角形添完整.

要使 $DH$ 成为三角形的中位线，必须使 $D$、$H$ 分别成为两条具有公共端点的线段的中点，现在 $D$ 已经是 $BC$ 的中点，所以必须使 $H$ 也成为中点.

于是延长 $CF$ 到 $I$，使 $HI=HC$，联结 $BI$(图 2-4-216).可得 $DH\parallel BI$，

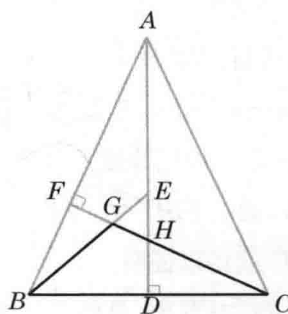


图 2-4-211

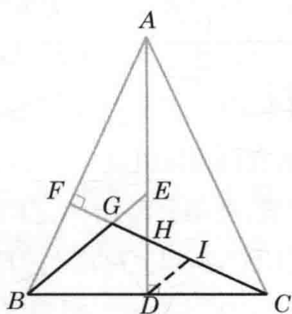


图 2-4-212

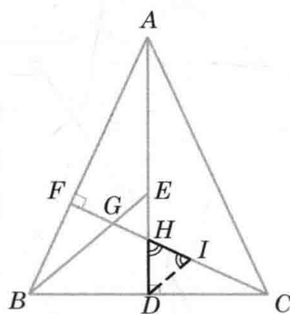


图 2-4-213

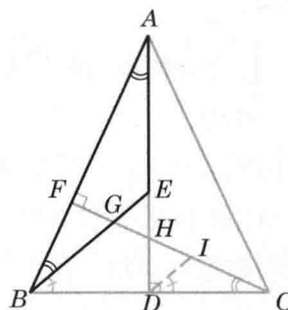


图 2-4-214

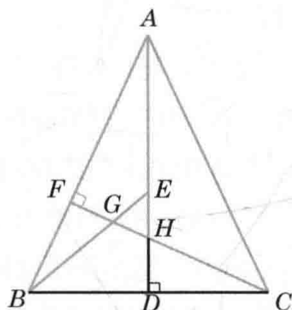


图 2-4-215

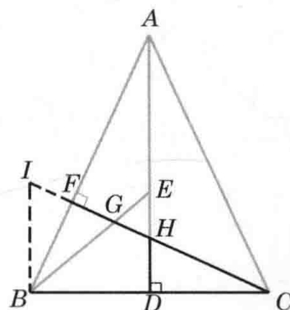


图 2-4-216

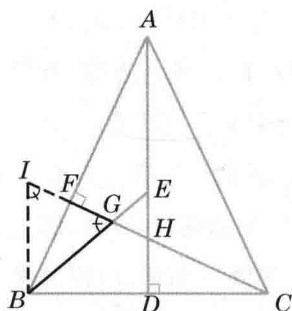


图 2-4-217

$BI=2DH$.

这样问题就转化为证明 $BG=BI$(图 2-4-217).

这是两条具有公共端点 $B$ 的相等线段,它们可以组成一个等腰三角形,问题也就转化为一个等腰三角形的判定问题,即证$\angle BGI=\angle BIG$.

由 $DH\parallel BI$,这两条平行线可以看作被 $IC$ 所截,可得$\angle BIG=\angle DHC$.

而由 $CF\perp AB$,$AD\perp BC$,又可得$\angle HFB=\angle HDB=90^\circ$,所以 $H$、$F$、$B$、$D$ 四点共圆.又由 $F$、$H$、$C$ 成一直线,可得$\angle DHC=\angle FBD$,所以$\angle BIG=\angle FBD$.

于是问题就转化为证$\angle BGI=\angle FBD$.因为 $I$、$G$、$C$ 成一直线,所以$\angle BGI$ 是$\triangle BCG$ 的一个外角,从而可推得$\angle BGI=\angle EBC+\angle GCB$.

由 $CF\perp AB$,$AD\perp BC$,可得$\angle GCB=\angle EAB$.又因为 $EB=EA$,这是两条具有公共端点 $E$ 的相等线段,它们可以组成一个等腰三角形.应用等腰三角形的性质,可得$\angle EAB=\angle EBA$,而$\angle FBD=\angle EBA+\angle EBC$,所以$\angle BGI=\angle FBD$ 就得以证明.

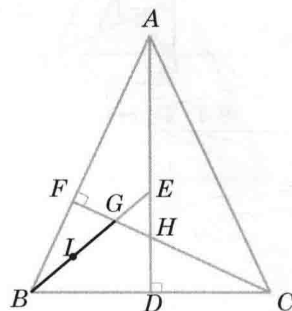


图 2-4-218

(2) 本题要证明的结论 $BG=2DH$ 是两条线段之间的倍半关系,可根据线段倍半关系的定义来进行分析.

① 可以将倍线段 $BG$ 两等分,即取 $BG$ 的中点 $I$(图 2-4-218),然后证明 $IG=DH$.

但在作出了 $I$ 是 $BG$ 的中点后,由 $AB=AC$,$AD\perp BC$,垂足是 $D$,可得 $D$ 是 $BC$ 的中点,这样就出现了两个中点,是多个中点问题,所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明.

由于 $I$、$D$ 所在的线段 $BG$、$BC$ 具有公共端点 $B$,

可以组成三角形，因此 $ID$ 这两个中点的连线就是三角形的中位线.现在图形中有三角形而没有中位线，应将中位线添上.于是联结 $ID$（图 2-4-219），可得 $ID \parallel GC$，即 $GH \parallel ID$.

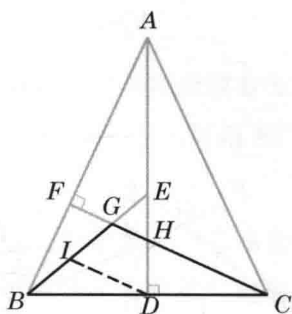


图 2-4-219

这样又出现了 $GH$ 是 $\triangle EID$ 内一条边 $ID$ 的平行线段（图 2-4-220），可应用由三角形内一条边的平行线得到的平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明.可得 $\dfrac{EG}{IG}=\dfrac{EH}{DH}$，这样问题就转化为证明 $EG=EH$.

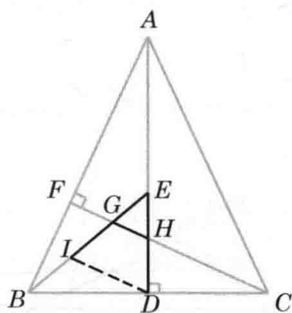


图 2-4-220

这是两条具有公共端点 $E$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，问题也就转化为一个等腰三角形的判定问题，即证 $\angle EGH=\angle EHG$.

而由 $CF\perp AB$，$AD\perp BC$，又可得 $\angle HFB=\angle HDB=90^\circ$，所以 $H$、$F$、$B$、$D$ 四点共圆.又由 $D$、$H$、$E$ 成一直线，可得 $\angle EHG=\angle FBD$.于是问题转化为证 $\angle EGH=\angle FBD$.

因为 $E$、$G$、$B$ 成一直线，所以 $\angle EGH$ 就是 $\triangle BCG$ 的一个外角，从而可推得 $\angle EGH=\angle EBC+\angle GCB$.又因为 $CF\perp AB$，$AD\perp BC$，所以 $\angle GCB=\angle EAB$.

又因为 $EB=EA$，这是两条具有公共端点 $E$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，应用等腰三角形的性质，可得 $\angle EAB=\angle EBA$.

而 $\angle FBD=\angle EBA+\angle EBC$，所以 $\angle EGH=\angle FBD$ 就得以证明.

② 可以作半线段 $DH$ 的两倍，然后证明所得到的线段与倍线段相等.于是延长 $HD$ 到 $I$，使 $DI=DH$（图 2-4-221），然后证明 $IH=BG$.

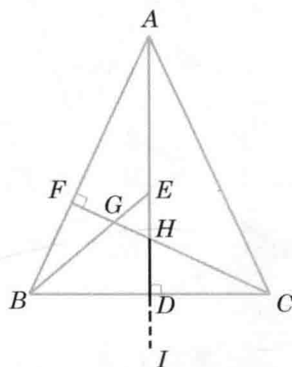


图 2-4-221

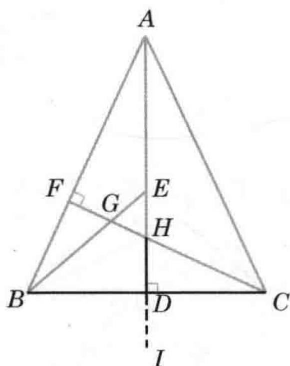


图 2-4-222

但在作出了 $D$ 是 $HI$ 的中点后，由 $AB=AC$，$AD\perp BC$，垂足是 $D$，可得 $D$ 也是 $BC$ 的中点，这样两组相等线段 $HD$、$ID$ 和 $BD$、$CD$ 位于一组对顶角的两边而且成一直线(图 2-4-222)，可应用或添加中心对称型全等三角形进行证明.

添加的方法是将四个端点两两联结起来，得到中心对称型全等三角形. 于是联结 $BI$，可得 $\triangle BDI\cong\triangle CDH$(图 2-4-223)，所以 $\angle DBI=\angle DCH$. 这样又可推得 $BI\parallel HC$，即 $GH\parallel BI$.

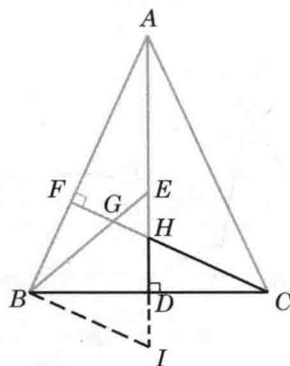


图 2-4-223

于是 $GH$ 是 $\triangle EBI$ 内一条边 $BI$ 的平行线段(图 2-4-224)，可应用由三角形内一条边的平行线得到的平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明，可得 $\dfrac{BG}{EG}=\dfrac{IH}{EH}$.

这样问题就转化为证明 $EG=EH$. 这是两条具有公共端点 $E$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，问题也就转化为一个等腰三角形的判定问题，即证 $\angle EGH=\angle EHG$. 证明方法同分析(2)①，不再赘述.

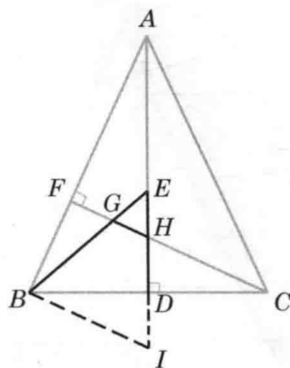


图 2-4-224

【例 15】已知：正方形 $ABCD$ 中，$AC$、$BD$ 相交于 $E$，$\angle CBD$ 的平分线交 $CD$ 于 $F$，过 $A$ 作 $AH\perp BF$ 交 $BD$ 于 $G$、交 $BF$ 于 $I$、交 $BC$ 于 $H$.(图 2-4-225)

求证：$CH=2EG$.

分析：本题的条件中给出正方形 $ABCD$ 的对角线 $AC$、$BD$ 相交于 $E$，所以 $E$ 是 $AC$ 的中点(图 2-4-226).

(1) 本题要证明的结论 $CH=2EG$ 是两条线段之间倍半关系，而 $EG$ 的端点 $E$ 是线段 $AC$ 的中点，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明.

于是可以将倍线段 $CH$ 取作三角形的边，也可以

将半线段 $EG$ 取作三角形的中位线.

① 若将倍线段 $CH$ 取作三角形的边(图 2-4-227),则有三角形而没有中位线,应将中位线添上.于是取 $AH$ 的中点 $J$,联结 $EJ$(图 2-4-228),可得 $EJ \parallel CH$,$CH=2EJ$.

于是问题就转化为证明 $EG=EJ$(图 2-4-229).这是两条具有公共端点 $E$ 的相等线段,它们可以组成一个等腰三角形,问题也就成为一个等腰三角形的判定问题,即证 $\angle EJG=\angle EGJ$.

因为 $EJ \parallel CB$,这两条平行线可以看作是被 $JH$ 所截,$\angle EJG$ 和 $\angle BHG$ 是一组内错角,所以可应用与内错角有关的平行线的基本图形的性质进行证明,可得 $\angle EJG=\angle BHG$.

而由 $BD$、$AH$ 相交于 $G$,又可得 $\angle EGJ=\angle BGH$,所以问题又转化为证 $\angle BHG=\angle BGH$.

由于 $BF$ 是 $\angle CBD$ 的平分线,且 $AH \perp BF$ 是向角平分线 $BF$ 所作的垂线,所以 $\triangle BGH$ 应是一个等腰三角形(图 2-4-230),$\angle BHG=\angle BGH$ 就得以证明.

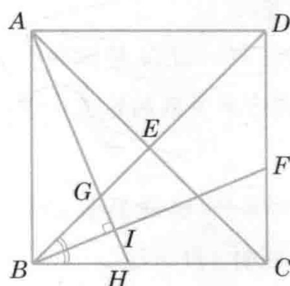


图 2-4-225

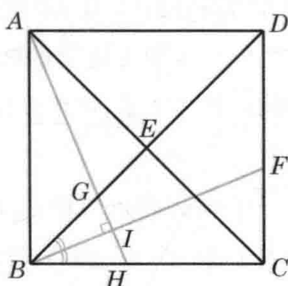


图 2-4-226

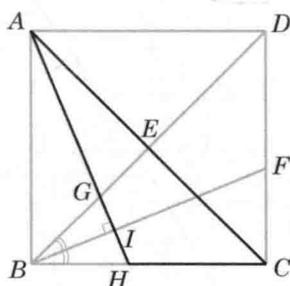


图 2-4-227

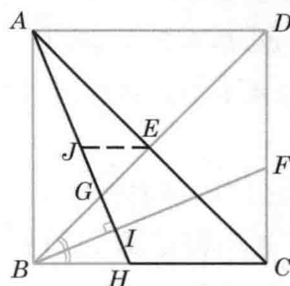


图 2-4-228

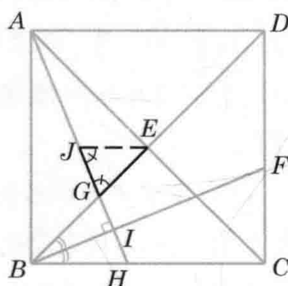


图 2-4-229

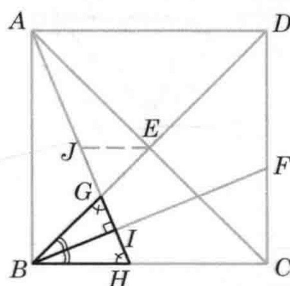


图 2-4-230

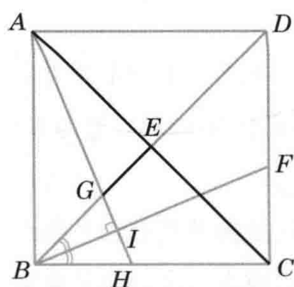


图 2-4-231

② 若将半线段 $EG$ 取作三角形的中位线(图 2-4-231),则图形中有中位线而三角形不完整,所以应先将三角形的边添上.于是延长 $AH$ 到 $J$,使 $JG=AG$,联结 $CJ$(图 2-4-232),可得 $EG\parallel CJ$,$CJ=2EG$.于是问题就转化为证明 $CH=CJ$(图 2-4-233).

这是两条具有公共端点 $C$ 的相等线段,它们可以组成一个等腰三角形,问题也就转化为一个等腰三角形的判定问题,即证$\angle CHJ=\angle CJH$.

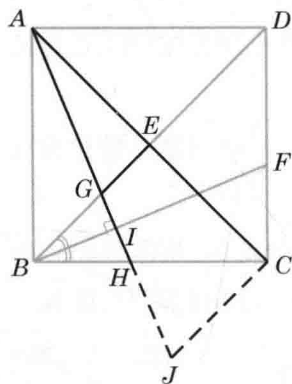


图 2-4-232

因为 $EG\parallel CJ$,这两条平行线可以看作是被 $GJ$ 所截,$\angle CJH$ 和$\angle BGH$ 是一组内错角,所以可应用与内错角有关的平行线的基本图形的性质进行证明,可得$\angle CJH=\angle BGH$.

而由 $BC$、$GJ$ 相交于 $H$,又可得$\angle CHJ=\angle BHG$,所以问题又转化为证$\angle BHG=\angle BGH$.证明方法同分析(1)①,不再赘述.

(2) 本题要证明的结论 $CH=2EG$ 是两条线段之间的倍半关系,可根据线段倍半关系的定义来进行分析.

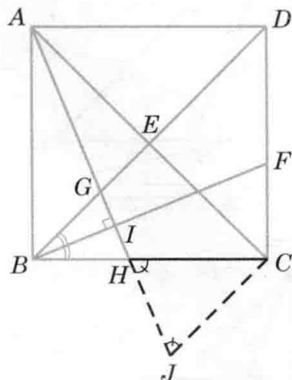


图 2-4-233

① 可以将倍线段 $CH$ 两等分,也就是取 $CH$ 的中点 $J$(图 2-4-234),然后证明 $JH=EG$.

但在作出了 $J$ 是 $CH$ 的中点后,由于 $E$ 是正方形 $ABCD$ 的对角线 $AC$、$BD$ 的交点,即 $E$ 是 $AC$ 的中点,这样就出现了两个中点,是多个中点问题,因此可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明.

由于 $E$、$J$ 所在的线段 $AC$、$HC$ 具有公共端点 $C$(图 2-4-235),可以组成三角形,因此 $EJ$ 这两个中点的连线就是三角形的中位线.现在图形中有三角形而没有中位线,应将中位线添上.于是联结 $EJ$(图 2-

4-236)，就可得 $EJ \parallel AH$，这样 $GH$ 是 $\triangle BEJ$ 内一条边 $EJ$ 的平行线段，所以 $\frac{BG}{EG}=\frac{BH}{JH}$. 这样问题就转化为证明 $BG=BH$.

由于 $BF$ 是 $\angle CBD$ 的平分线，且 $AH \perp BF$ 是向角平分线 $BF$ 所作的垂线，所以 $\triangle BGH$ 是一个等腰三角形(图 2-4-237)，$BG=BH$ 就得以证明.

② 也可以作半线段的两倍，然后证明所得到的线段与倍线段相等. 于是在 $GE$ 的延长线($ED$)上截取 $EJ=EG$(图 2-4-238)，问题就转化为证明 $JG=CH$.

由于 $E$ 是正方形 $ABCD$ 的对角线 $AC$、$BD$ 的交点，即 $E$ 是 $AC$ 的中点. 这样两组相等线段 $EG$、$EJ$ 和 $EA$、$EC$ 就位于一组对顶角的两边而且成一直线(图 2-4-239)，可应用或添加中心对称型全等三角形进行证明. 添加的方法是将四个端点两两联结起来，得到中心对称型全等三角形.

于是联结 $CJ$，可得 $\triangle AEG \cong \triangle CEJ$ (图 2-4-240)，所以 $\angle EAG = \angle ECJ$. 可推得 $AH \parallel JC$，即 $GH \parallel JC$.

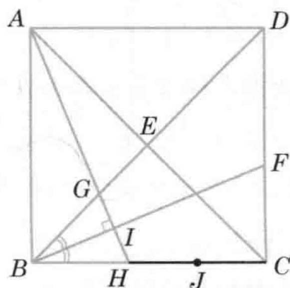


图 2-4-234

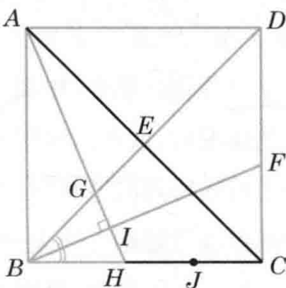


图 2-4-235

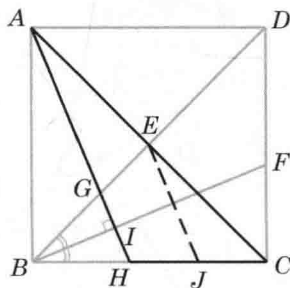


图 2-4-236

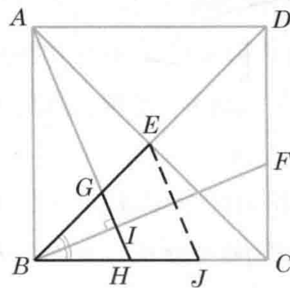


图 2-4-237

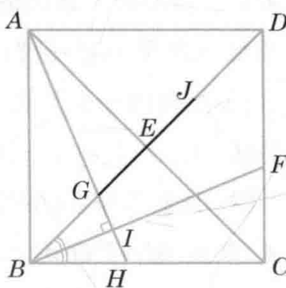


图 2-4-238

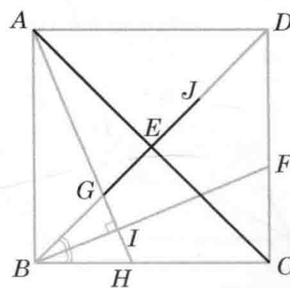


图 2-4-239

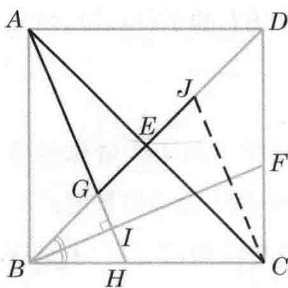


图 2-4-240

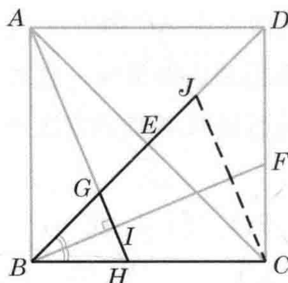


图 2-4-241

于是 $GH$ 是 $\triangle BJC$ 内一条边 $JC$ 的平行线段，可得 $\frac{BG}{JG}=\frac{BH}{CH}$.这样问题就转化为证明 $BG=BH$（图 2-4-241）.证明方法同分析(2)①，不再赘述.

如果需要集中进行这类基本图形的教学，可以在《几何王》软件的“智能搜索”功能中，选择左边栏筛选条件中的“基本图形”，鼠标依次悬停在“相似三角形”→“平行线型”，最后点击“三角形的中位线”，就可以将所有有关三角形的中位线的习题全部搜索出来.

## 二、逆平行线型

### （一）三角形内的逆平行线型

$\triangle ABC$ 中，$D$ 是 $AB$ 上一点，$E$ 是 $AC$ 上一点，$\angle AED=\angle ABC \quad \Rightarrow \triangle AED \backsim \triangle ABC \Rightarrow AD \cdot AB = AE \cdot AC$，$D$、$B$、$C$、$E$ 四点共圆（图 2-4-242）

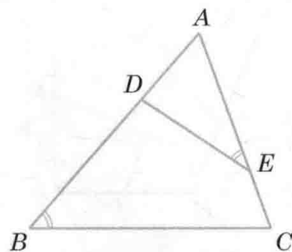


图 2-4-242

在几何问题中，出现了相乘两线段重叠在一直线上的情况时，就可以应用或添加由三角形内一条边的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是过端点和内分点作逆平行线.

在几何问题中，出现了两组相乘线段都重叠在一直线上，且有一个公共端点的情况时，就可以应用或添加由三角形内一条边的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是将端点和端点、内分点和内分点分别联结，这两条连线一定是逆平行线.

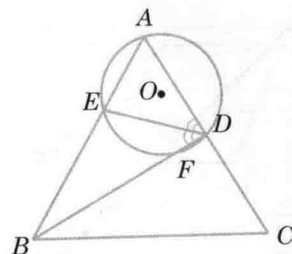


图 2-4-243

【例 16】已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$D$ 是 $AC$ 的中点，联结 $BD$，$DE$ 是 $\angle ADB$ 的平分线，$\triangle AED$ 的外接圆⊙$O$ 与 $BD$ 相交于 $F$.（图 2-4-243）

求证：$BF=2AE$.

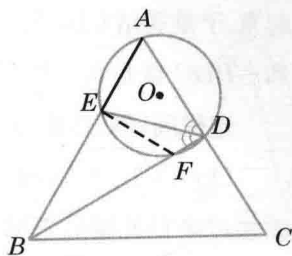


图 2-4-244

分析:本题的条件中出现了 $A$、$E$、$F$、$D$ 四点共圆,可应用圆周角的基本图形的性质进行证明.

由于$\angle ADE=\angle BDE$,这两个角都是圆周角,结论中出现的 $AE$ 是$\angle ADE$ 所对的弦,而$\angle BDE$ 所对的弦尚未出现,所以应先将这条弦添上.于是联结 $EF$(图 2-4-244),可得 $AE=EF$.这样问题就转化为证 $BF=2FE$.

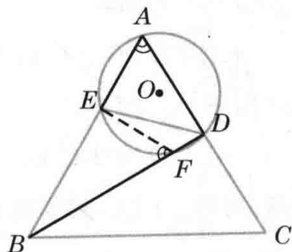


图 2-4-245

又因为 $A$、$E$、$F$、$D$ 四点共圆,且 $D$、$F$、$B$ 成一直线,所以可应用圆周角的基本图形也就是圆内接四边形的性质,可得$\angle BFE=\angle EAD$(图 2-4-245).于是就出现了 $EF$ 是$\triangle BAD$ 内一条边 $DA$ 的逆平行线段,从而可以应用逆平行线相似三角形进行证明.

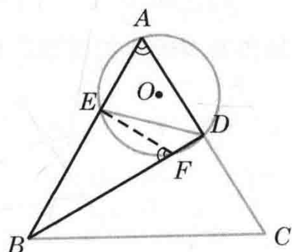


图 2-4-246

于是由$\angle BFE=\angle EAD$,$\angle FBE=\angle ABD$,可得$\triangle BEF\backsim\triangle BDA$(图 2-4-246),所以$\dfrac{BF}{EF}=\dfrac{AB}{AD}$.

但已知 $AB=AC$,且 $D$ 是 $AC$ 的中点,所以,$\dfrac{AC}{AD}=2$,即$\dfrac{AB}{AD}=2$,从而可证明$\dfrac{BF}{EF}=2$.

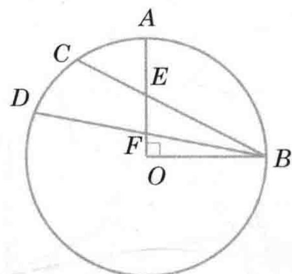


图 2-4-247

【例 17】已知:$OA$、$OB$ 是$\odot O$ 的半径,$OA\perp OB$,弦 $BC$、$BD$ 分别交 $OA$ 于 $E$、$F$.(图 2-4-247)

求证:$BC\cdot BE=BD\cdot BF$.

分析:本题要证明的结论 $BC\cdot BE=BF\cdot BD$ 是线段之间的比例关系,首先进行描图,搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现,两组相乘线段 $BC$、$BE$ 和 $BD$、$BF$ 分别重叠在一直线上(图 2-4-248),所以可应用或添加逆平行线型相似三角形进行证明.

这两组重叠的相乘线段有一个公共端点 $B$,添加的方法就是将端点和端点、内分点和内分点分别联结

起来.于是联结 $CD$(图 2 - 4 - 249),可得 $EF$、$CD$ 必定是一组逆平行线,$\triangle BEF$ 和$\triangle BDC$ 就是由三角形内一条边的逆平行线段得到的逆平行线型相似三角形.

这样问题就转化为证 $BC \cdot BE = BD \cdot BF$ 的等价性质$\angle BEF = \angle BDC$.

(1) 由于 $OA$、$OB$ 是$\odot O$ 的半径,$OA \perp OB$,出现了半径的垂线,因此可添加过半径外端的垂线,转化为弦切角的基本图形进行证明.于是过 $B$ 作 $BG \perp OB$(图 2 - 4 - 250),可得 $BG$ 与$\odot O$ 相切于 $B$,而 $BC$ 是过切点的弦,所以$\angle GBC = \angle BDC$.

又因为 $BG \parallel OA$,所以$\angle GBC = \angle BEF$(图 2 - 4 - 251),从而就可证明$\angle BEF = \angle BDC$.

(2) 由$\angle BDC$ 是一个圆周角(图 2 - 4 - 252),应用圆周角的基本图形的性质,可得$\angle BDC$ 的度数等于 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数的一半,也就是 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 的度数之和的一半.

而$\angle BEF$ 是一个圆内角,应用圆内角的性质,它的度数应等于它和它的对顶角所对的弧的度数之和的一半,现在这个圆内角所对的弧尚未出现,于是要将

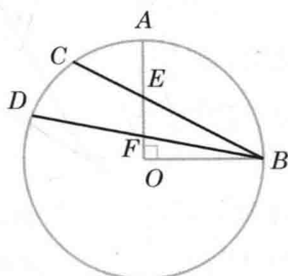


图 2 - 4 - 248

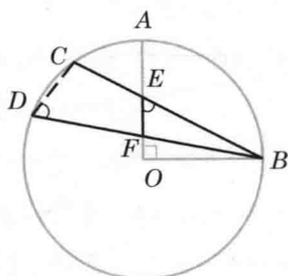


图 2 - 4 - 249

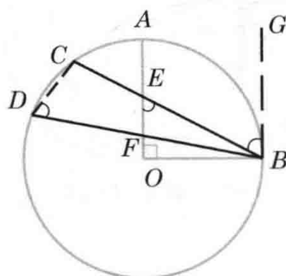


图 2 - 4 - 250

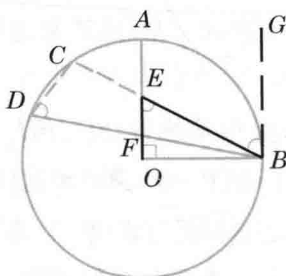


图 2 - 4 - 251

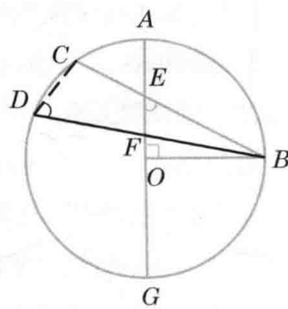


图 2 - 4 - 252

它所对的弧作出来，即延长 $AO$ 交$\odot O$ 于 $G$. 所以$\angle BEF$ 的度数就等于 $\overset{\frown}{BG}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 的度数之和的一半.

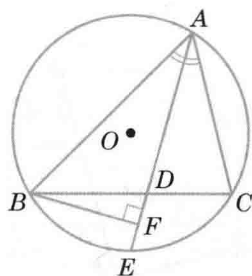



图 2-4-253

由 $OA$、$OB$ 是$\odot O$ 的半径，$OA \perp OB$，应用圆心角的性质，可得 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{BG}$ 的度数都是 $90°$，所以分析可以完成.

【例 18】 已知：$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，$AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线，$AD$ 的延长线与$\odot O$ 相交于 $E$，$BF \perp AE$，垂足是 $F$.（图 2-4-253）

求证：$AB^2-2BF^2=AB \cdot AC-2AF \cdot EF$.

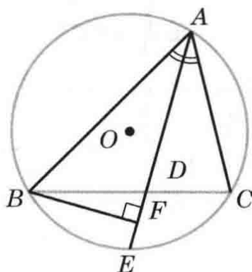



图 2-4-254

分析：本题的条件中出现了 $AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线，$BF \perp AE$ 是向角平分线 $AD$ 所作的垂线（图 2-4-254），所以可得到一个等腰三角形中重要线段的基本图形.

由于这个等腰三角形是由角平分线 $AD$ 的垂线 $BF$ 和角的两边 $AB$、$AC$ 相交得到的，而现在 $BF$ 尚未和角的一边 $AC$ 相交，应将它们延长到相交. 于是延长 $BF$ 交 $AC$ 的延长线于 $G$，并设 $BG$ 交$\odot O$ 于 $H$（图 2-4-255），可得$\triangle ABF \cong \triangle AGF$，$AG=AB$，$BF=GF$.

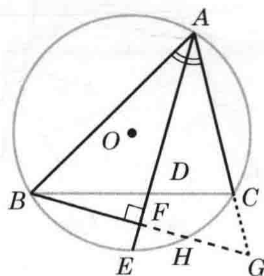



图 2-4-255

本题要证明的结论是 $AB^2-2BF^2=AB \cdot AC-2AF \cdot EF$. 由于等式两边都出现了 $AB$，因此可先移项和提取公因式转化为 $AB(AB-AC)=2BF^2-2AF \cdot EF$.

而 $AB(AB-AC)=AG(AG-AC)=AG \cdot CG$，于是问题就转化为证 $AG \cdot CG=2BF^2-2AF \cdot EF$.

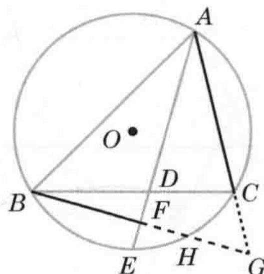



图 2-4-256

这是线段之间的比例关系式，首先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现，$AG$ 和 $CG$ 这一组相乘线段重叠在一直线上（图 2-4-256），可应用逆平行线型

相似三角形进行证明.

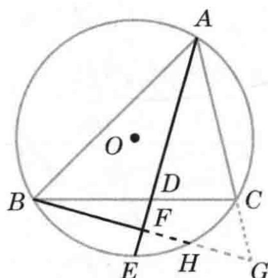


图 2-4-257

由于现在出现的是由圆外一点 $G$ 所作的圆的两条割线,因此可直接应用割线定理得 $AG \cdot CG = BG \cdot HG$.而 $BG = 2BF$,$HG = GF - HF$,所以 $AG \cdot CG = 2BF(GF - HF) = 2BF(BF - HF) = 2BF^2 - 2BF \cdot HF$.

将这个关系式与要证的结论相比较,即可将问题转化为证 $AF \cdot EF = BF \cdot HF$.

而 $BH$ 和 $AE$ 是⊙$O$ 中相交于点 $F$ 的两条弦,可直接应用相交弦定理,实际上就是再应用一次逆平行线型相似三角形的基本图形的性质(图 2-4-257),就可证明上述性质,分析就得以完成.

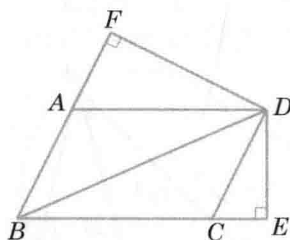


图 2-4-258

【例 19】已知:四边形 $ABCD$ 是平行四边形,联结 $BD$,$DE \perp BC$,垂足是 $E$,$DF \perp AB$,垂足是 $F$.(图 2-4-258)

求证:$BC \cdot BE + BA \cdot BF = BD^2$.

分析:本题要证明的结论是 $BC \cdot BE + BA \cdot BF = BD^2$,出现了线段两两积的和的关系,是线段之间的比例关系.拿到一个比例关系,应先进行描图,搞清楚比例线段之间的位置关系.

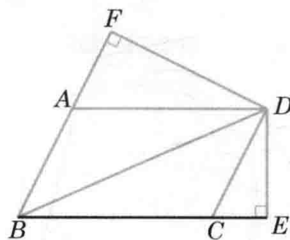


图 2-4-259

经过描图可以发现,$BC$、$BE$,$BA$、$BF$ 这两组相乘线段分别重叠在一直线上(图 2-4-259),可添加逆平行线型相似三角形进行证明.添加的方法是过端点和内分点作逆平行线.于是,首先取过端点或内分点的线段为逆平行方向线段.

由于过内分点 $C$ 有线段 $CD$,过端点 $E$ 有线段 $ED$,而条件给出了 $DE \perp BC$,垂足是 $E$,$ED$ 是和条

件有关的线段，因此选取 $ED$ 为逆平行方向线段（图 2-4-260）．

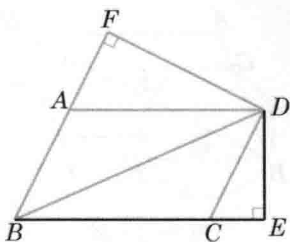


图 2-4-260

因为逆平行方向线段过端点 $E$，所以逆平行线应过内分点 $C$ 作．于是过点 $C$ 作一条线段和 $BD$ 相交于 $G$，且应满足 $\angle BGC=\angle BED$（图 2-4-261）．而由条件 $DE\perp BC$，垂足是 $E$，可得 $\angle BED=90°$，所以 $\angle BGC$ 应等于 $90°$，也就是 $CG$ 应和 $BD$ 垂直．于是过 $C$ 作 $CG\perp BD$，垂足是 $G$，可得 $\triangle BGC\backsim\triangle BED$，也就可推得 $\frac{BG}{BE}=\frac{BC}{BD}$，$BG\cdot BD=BC\cdot BE$．

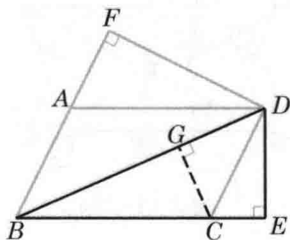


图 2-4-261

同理，过 $A$ 作 $AH\perp BD$，垂足是 $H$（图 2-4-262），可得 $\triangle BHA\backsim\triangle BFD$，进一步可推得 $\frac{BH}{BF}=\frac{BA}{BD}$，$BH\cdot BD=BA\cdot BF$．

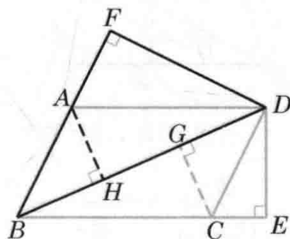


图 2-4-262

所以结论中的 $BC\cdot BE+BA\cdot BF$ 就等价于 $BG\cdot BD+BH\cdot BD=BD(BG+BH)$，于是就要证明 $BD^2=BD(BG+BH)$，即证明 $BD=BG+BH$．而 $BD=BG+DG$，于是问题又转化为证明 $BH=DG$．

由于这两条要证明相等的线段位于一个平行四边形的中心对称部分，因此可应用中心对称型全等三角形进行证明．

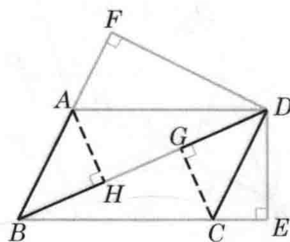


图 2-4-263

根据平行四边形的中心对称部分，就能找到这对全等三角形是 $\triangle ABH$ 和 $\triangle CDG$（图 2-4-263）．全等的条件是 $AB=CD$，$\angle ABH=\angle CDG$，$\angle AHB=\angle CGD=90°$．

所以 $BH=DG$ 就可以证明，分析也就得以完成．

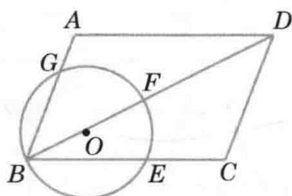


图 2-4-264

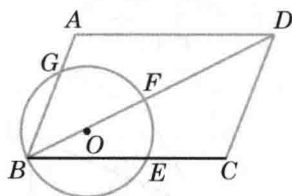


图 2-4-265

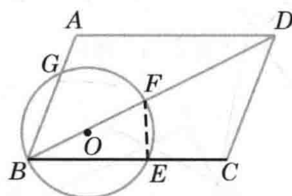


图 2-4-266

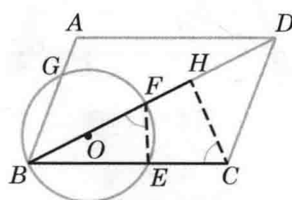


图 2-4-267

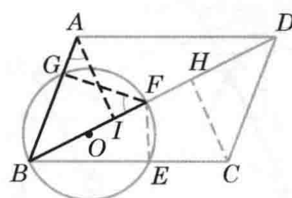


图 2-4-268

【例 20】已知：平行四边形 $ABCD$ 中，$\odot O$ 过点 $B$ 且分别交 $BC$、$BD$、$BA$ 于 $E$、$F$、$G$.(图 2-4-264)

求证：$BE \cdot BC + BG \cdot BA = BF \cdot BD$.

分析：本题要证明的结论是 $BE \cdot BC + BG \cdot BA = BF \cdot BD$，出现了线段两两积的和的关系，是线段之间的比例关系.

拿到一个比例关系，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现，三组相乘线段 $BE$、$BC$，$BG$、$BA$，$BF$、$BD$ 都重叠在一直线上，可添加逆平行线型相似三角形进行证明，而且从哪一组重叠的相乘线段开始进行讨论就出现了三种情况.

(1) 若选取 $BE$、$BC$ 这一组重叠的相乘线段开始进行讨论(图 2-4-265)，则由于 $BE$、$BC$ 具有公共端点 $B$，因此添加的方法是过端点 $C$ 和内分点 $E$ 作逆平行线.

因为$\odot O$ 与 $BC$、$BD$ 分别相交于 $E$、$F$，$EF$ 就是$\odot O$ 内的一条弦，所以可联结 $EF$(图 2-4-266)，并取 $EF$ 为逆平行方向线段.

由于逆平行方向线段 $EF$ 过内分点 $E$，因此应过端点 $C$ 作逆平行线，即过点 $C$ 作一条线和 $BD$ 相交于 $H$，且应满足$\angle BCH = \angle BFE$. 于是以 $CB$ 为边、$C$ 为顶点，作$\angle BCH = \angle BFE$ 交 $BD$ 于 $H$(图 2-4-267). 可得$\triangle BEF \backsim \triangle BHC$. 也就可推得 $\dfrac{BE}{BH} = \dfrac{BF}{BC}$，$BE \cdot BC = BF \cdot BH$.

同理，联结 $FG$ 后，以 $AB$ 为边、$A$ 为顶点，作$\angle BAI = \angle BFG$ 交 $BD$ 于 $I$(图 2-4-268)，可得

$\triangle BGF \backsim \triangle BIA$，也就可推得$\dfrac{BG}{BI}=\dfrac{BF}{BA}$，$BG \cdot BA = BF \cdot BI$.

这样结论中出现的 $BE \cdot BC + BG \cdot BA$ 就等于 $BF \cdot BH + BF \cdot BI$，也就是 $BF(BH+BI)$.

问题就转化为证明 $BF(BH+BI)=BF \cdot BD$，即证 $BH+BI=BD$.但 $BH+DH=BD$，于是问题又应转化为证明 $BI=DH$.

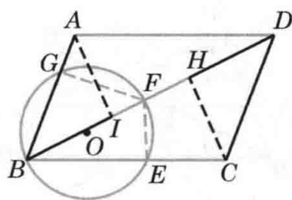


图 2-4-269

由于这两条要证明相等的线段位于一个平行四边形的中心对称部分，因此可应用中心对称型全等三角形进行证明.

根据平行四边形的中心对称部分，就能找到这对全等三角形应是$\triangle ABI$和$\triangle CDH$（图 2-4-269），全等的条件已经有 $AB=CD$，$\angle ABI=\angle CDH$，还缺少一个条件.

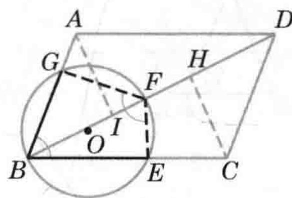


图 2-4-270

由 $B$、$E$、$F$、$G$ 四点共圆，应用圆内接四边形的性质即圆周角的基本图形的性质，可得$\angle ABC+\angle EFG=180°$（图 2-4-270）.而应用平行四边形的性质，可得$\angle ABC+\angle BCD=180°$，故$\angle EFG=\angle BCD$.又由$\angle BCH=\angle BFE$，可推得$\angle BFG=\angle DCH$.而$\angle BFG=\angle BAI$，就可证明$\angle BAI=\angle DCH$.

从而就能证明$\triangle ABI \cong \triangle CDH$，$BI=DH$，分析也就得以完成.

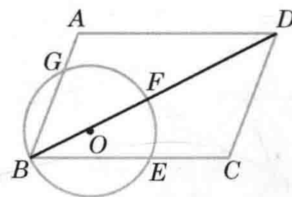


图 2-4-271

（2）若分析是从 $BF$、$BD$ 这一组重叠的相乘线段出发（图 2-4-271），则可添加逆平行线型相似三角形进行证明.

由于 $BF$、$BD$ 这两条重叠的相乘线段有公共端点 $B$，因此添加的方法是过端点 $D$ 和内分点 $F$ 作逆

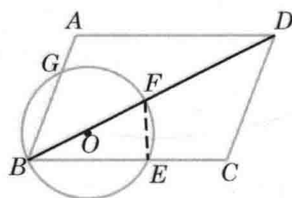


图 2-4-272

平行线.

已知⊙$O$ 与 $BC$、$BD$ 分别相交于 $E$、$F$，$EF$ 就是一条弦，于是联结 $EF$（图 2-4-272），并取 $EF$ 为逆平行方向线段，由于 $EF$ 过内分点 $F$，因此应过端点 $D$ 作逆平行线（图 2-4-273）. 于是以 $DB$ 为边、$D$ 为顶点，作$\angle BDH=\angle BEF$ 交 $BC$ 的延长线于 $H$. 可得$\triangle BEF\backsim\triangle BDH$，也就可推得$\frac{BE}{BD}=\frac{BF}{BH}$，$BF\cdot BD=BE\cdot BH$.

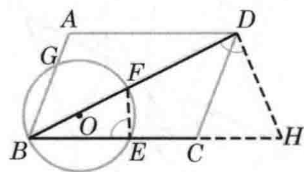


图 2-4-273

同理，联结 $EG$ 后，以 $AB$ 为边、$A$ 为顶点，作$\angle BAI=\angle BEG$ 交 $BC$ 于 $I$（图 2-4-274）. 可得$\triangle BGE\backsim\triangle BIA$，也就可推得$\frac{BG}{BI}=\frac{BE}{BA}$，$BG\cdot BA=BE\cdot BI$.

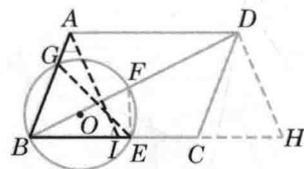


图 2-4-274

这样要证明的结论 $BE\cdot BC+BG\cdot BA=BF\cdot BD$ 就转化为 $BE\cdot BC+BE\cdot BI=BE\cdot BH$，并进一步转化为 $BE(BC+BI)=BE\cdot BH$，即 $BC+BI=BH$.

但 $BC+CH=BH$，所以问题又转化为证明 $BI=CH$.

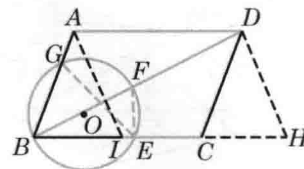


图 2-4-275

由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 $B$、$C$、$H$ 成一直线，应用平行四边形的性质可得 $AB=DC$，$\angle ABI=\angle DCH$，所以$\triangle ABI$ 和$\triangle DCH$ 是一对平移型全等三角形（图 2-4-275），而要证明这两个三角形全等，还缺少一个条件.

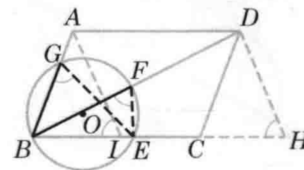


图 2-4-276

由$\triangle BGE\backsim\triangle BIA$，可得$\angle BGE=\angle BIA$. 由 $B$、$E$、$F$、$G$ 四点共圆，应用圆周角的基本图形的性质，可得$\angle BGE=\angle BFE$（图 2-4-276）.

而由$\triangle BEF \backsim \triangle BDH$，又可得$\angle BFE = \angle BHD$，从而可得$\angle BIA = \angle CHD$.

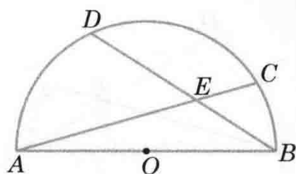


图 2-4-277

从而就能证明$\triangle ABI \cong \triangle DCH$，$BI = CH$，分析也就得以完成.

【例 21】已知：以$AB$为直径的半圆$O$中，弦$AC$、$BD$相交于$E$.（图 2-4-277）

求证：$AE \cdot AC + BE \cdot BD = AB^2$.

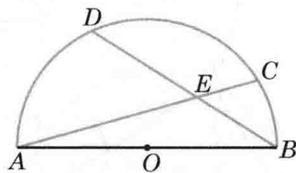


图 2-4-278

分析：本题条件中给出$AB$是半圆$O$的直径（图 2-4-278），于是可应用直径的性质，也就是半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明.

现在图形中有直径，有半圆上的点$C$、$D$，而没有圆周角，所以应将圆周角添上，也就是联结$AD$、$BC$，可得$\angle ADB = \angle ACB = 90°$（图 2-4-279）.

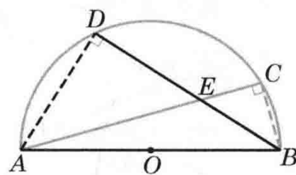


图 2-4-279

本题要证明的结论是$AE \cdot AC + BE \cdot BD = AB^2$，出现了线段两两积的和的关系，所以是线段之间的比例关系.拿到一个比例关系，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

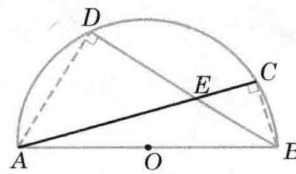


图 2-4-280

经过描图可以发现，$AE$、$AC$，$BE$、$BD$这两组相乘线段分别重叠在一直线上（图 2-4-280），所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明.添加的方法是过端点和内分点作逆平行线.

于是，首先取过端点或内分点的线段为逆平行方向线段.

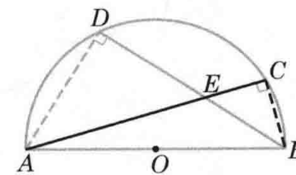


图 2-4-281

由于过内分点$E$有线段$EB$，过端点$C$有线段$CB$，而已经证明$CB \perp AC$，$CB$是和条件有关的线段，因此选取$CB$为逆平行方向线段（图 2-4-281）.

由于逆平行方向线段过端点$C$，因此过内分点$E$作逆平行线，也就是过点$E$作$EF \perp AB$，垂足是$F$（图

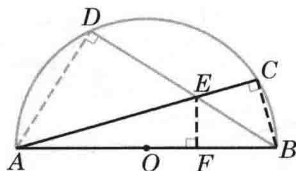


图 2-4-282

2-4-282)，就可得$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$，也就可推得$\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$，$AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

同理，由$EF \perp AB$，垂足是$F$，又可得$\triangle BEF \backsim \triangle BAD$(图 2-4-283).也就可进一步推得$\frac{BF}{BD}=\frac{BE}{BA}$，$BE \cdot BD = BF \cdot BA$.

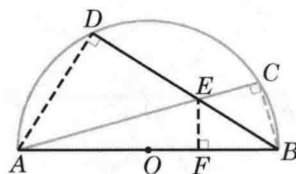


图 2-4-283

所以结论中要证明的$AE \cdot AC + BE \cdot BD$就转化为$AF \cdot AB + BF \cdot BA = AB(AF + BF)$.

而$AF + BF$就等于直径$AB$，所以分析就得以完成.

（二）三角形外的逆平行线型

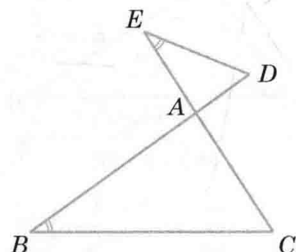


图 2-4-284

$\triangle ABC$中，$D$是$BA$的延长线上一点，$E$是$CA$的延长线上一点，$\angle AED = \angle ABC \Rightarrow \triangle AED \backsim \triangle ABC \Rightarrow AD \cdot AB = AE \cdot AC$，$D$、$B$、$C$、$E$四点共圆(图 2-4-284)

在几何问题中，出现了相乘两线段重叠在一直线上的情况时，可应用或添加由三角形外一条边的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明.添加的方法是过端点和端点作逆平行线.

在几何问题中，出现了两组相乘线段都重叠在一直线上，且在内分点相交的情况时，就可以应用或添加由三角形外一条边的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明.添加的方法是将两组端点分别联结，这两条连线一定是逆平行线.

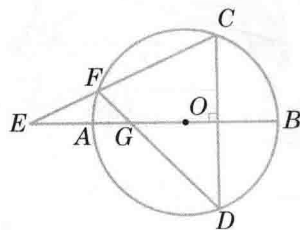


图 2-4-285

【例 22】已知：$AB$是$\odot O$的直径，$CD$是$\odot O$的一条弦，$CD \perp AB$，延长$BA$到$E$，$CE$与$\odot O$相交于$F$，$DF$、$AB$相交于$G$.(图 2-4-285)

求证：$EG \cdot OG = FG \cdot DG$.

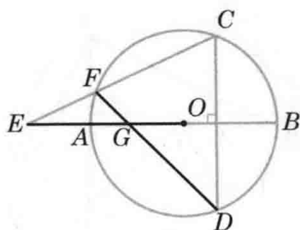


图 2-4-286

分析：本题要证明的结论 $EG \cdot OG = FG \cdot DG$，是线段之间的比例关系，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现，两组相乘线段 $EG$、$OG$ 和 $FG$、$DG$ 都分别重叠在一直线上(图 2-4-286)，可应用或添加逆平行线型相似三角形进行证明.

由于这两组重叠的相乘线段在内分点 $G$ 相交，因此添加的方法是将四个端点两两联结起来.于是联结 $DO$(图 2-4-287)，可得 $EF$、$DO$ 必定是逆平行线，$\triangle EGF$ 和$\triangle DGO$ 是由三角形外一条边的逆平行线段得到的逆平行线型相似三角形.

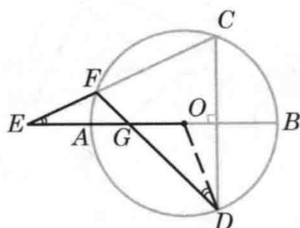


图 2-4-287

(1) 这样问题就转化为要证 $EG \cdot OG = FG \cdot DG$ 的等价性质$\angle GEF = \angle GDO$.

由 $CD \perp AB$，可得$\angle GEF + \angle ECD = 90°$，于是问题转化成证$\angle GDO + \angle ECD$ 也等于 90°.这是两个角的和的问题，所以可根据角的和的定义，将这两个角拼到一起.

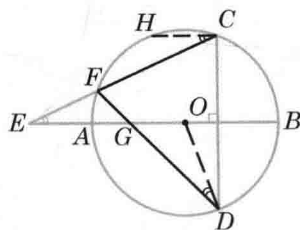


图 2-4-288

① 如选择将$\angle GDO$ 拼到$\angle ECD$ 的边 $EC$ 的外侧，也就是作$\angle FCH = \angle GDO$(图 2-4-288)，那么$\angle DCH$ 就应等于 90°.

而$\angle DCH$ 是⊙$O$ 的一个圆周角，所以 $DH$ 应是⊙$O$ 的直径，于是直接作出直径，也就是延长 $DO$ 交⊙$O$ 于 $H$，联结 $CH$(图 2-4-289).

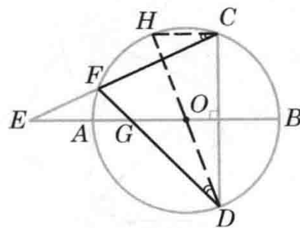


图 2-4-289

那么，由 $D$、$C$、$H$、$F$ 四点共圆，可得$\angle GDO = \angle FCH$.

又因为 $DH$ 是⊙$O$ 的直径，$C$ 是半圆上的一点，所以$\angle DCH = 90°$，也就是$\angle FCH + \angle ECD = 90°$，从

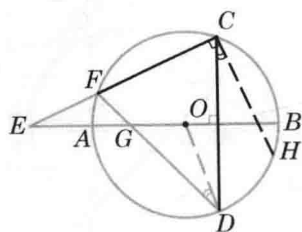


图 2-4-290

而就可推得$\angle GDO+\angle ECD=90^\circ$，所以$\angle GEF=\angle GDO$就可以证明.

而由$EO$、$DF$相交于$G$，又可得$\angle EGF=\angle DGO$，所以$\triangle EGF\backsim\triangle DGO$，分析就得以完成.

② 如选取将$\angle GDO$拼到$\angle ECD$的边$CD$的外侧，也就是作$\angle DCH=\angle GDO$(图 2-4-290)，那么$\angle FCH$等于$90^\circ$，而$\angle FCH$是$\odot O$的一个圆周角，所以$FH$应是$\odot O$的直径，于是直接作出直径，也就是联结$FO$，延长$FO$交$\odot O$于$H$，联结$CH$(图 2-4-291).由$FH$是$\odot O$的直径，$C$是半圆上的一点，可得$\angle FCH=90^\circ$，也就是$\angle DCH+\angle ECD=90^\circ$.

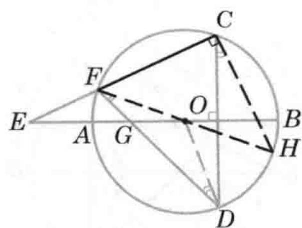


图 2-4-291

这样问题就转化为证明$\angle GDO=\angle DCH$.由于$OD$、$OF$是$\odot O$的两条半径，当然相等，因此$\angle GDO=\angle OFD$，这样问题又转化为证明$\angle OFD=\angle DCH$.由条件$D$、$H$、$C$、$F$四点共圆，所以这两个角相等就可以证明，从而就可推得$\angle GDO+\angle ECD=90^\circ$，所以$\angle GEF=\angle GDO$就可以证明.而由$EO$、$DF$相交于$G$，又可得$\angle EGF=\angle DGO$，故$\triangle EGF\backsim\triangle DGO$，分析就得以完成.

③ 如选择将$\angle FCD$拼到$\angle GDO$的边$DG$的外侧，也就是作$\angle FDH=\angle FCD$，那么$\angle ODH$等于$90^\circ$，于是作$DH\perp OD$(图 2-4-292).

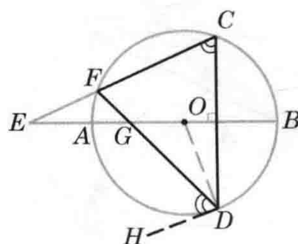


图 2-4-292

而$OD$是$\odot O$的半径，所以$HD$就是$\odot O$的切线，并且与$\odot O$在点$D$相切，从而可应用弦切角的基本图形的性质进行证明.

由$DF$是过切点$D$的弦，可得$\angle HDF=\angle FCD$，从而就可推得$\angle GDO+\angle ECD=90^\circ$，所以$\angle GEF=\angle GDO$就可以证明，而由$EO$、$DF$相交于

$G$,又可得$\angle EGF=\angle DGO$,所以$\triangle EGF\backsim\triangle DGO$,分析就得以完成.

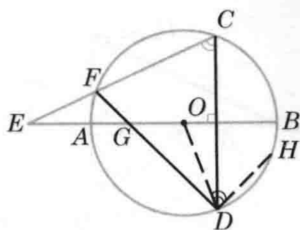


图 2-4-293

④ 如选择将$\angle FCD$拼到$\angle GDO$的边$DO$的外侧,也就是作$\angle ODH=\angle FCD$,那么$\angle FDH$就应等于$90^\circ$(图2-4-293).

而$\angle FDH$是$\odot O$的一个圆周角,所以$FH$是$\odot O$的直径,于是直接作出直径,也就是联结$FO$,延长$FO$交$\odot O$于$H$,联结$DH$(图2-4-294).

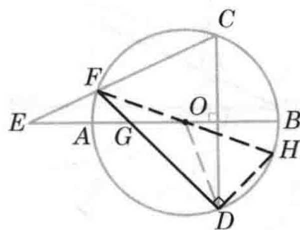


图 2-4-294

由$FH$是$\odot O$的直径,$D$是半圆上的一点,可得$\angle FDH=90^\circ$,也就是$\angle GDO+\angle ODH=90^\circ$,这样问题就转化为证明$\angle ODH=\angle FCD$.

由于$OD$、$OH$是$\odot O$的两条半径,当然相等,因此$\angle ODH=\angle OHD$,这样问题又转化为证明$\angle OHD=\angle FCD$.因为$D$、$H$、$C$、$F$四点共圆,所以这两个角相等就可以证明.从而就可推得$\angle GDO+\angle ECD=90^\circ$,所以$\angle GEF=\angle GDO$就可以证明.而由$EO$、$DF$相交于$G$,又可得$\angle EGF=\angle DGO$,所以$\triangle EGF\backsim\triangle DGO$,分析就得以完成.

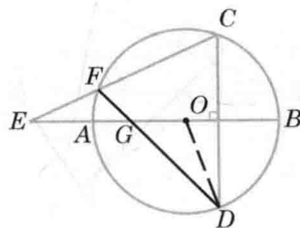


图 2-4-295

(2) 当问题转化为证$\angle GEF=\angle GDO$后,由于$\angle GDO$是$\odot O$的一个圆周角,因此可应用圆周角基本图形的性质进行证明.但$\angle GDO$的一条边$DO$尚未和$\odot O$相交(图2-4-295),所以应先将$DO$延长到与$\odot O$相交.于是延长$DO$交$\odot O$于$H$,联结$CH$(图2-4-296).由$D$、$C$、$H$、$F$四点共圆,可得$\angle GDO=\angle FCH$,所以问题转化成证$\angle FCH=\angle GEF$.

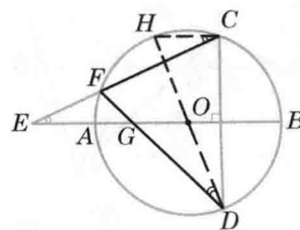


图 2-4-296

又因为$DH$是$\odot O$的直径,$C$是半圆上的一点,所以$\angle DCH=90^\circ$,$HC\perp CD$.又由$CD\perp AB$,可得$HC\parallel EB$.这两条平行线可以看作被$CE$所截,

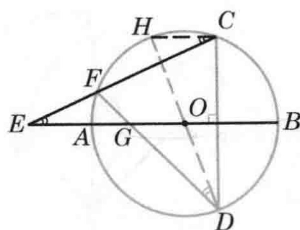


图 2-4-297

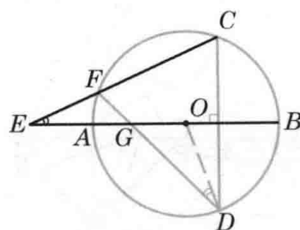


图 2-4-298

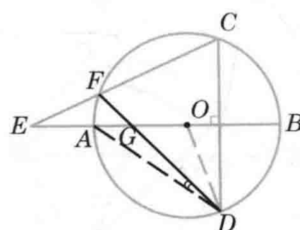


图 2-4-299

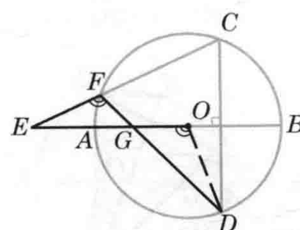


图 2-4-300

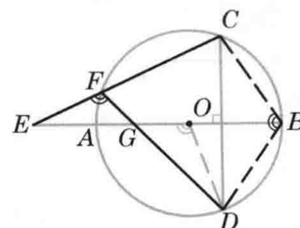


图 2-4-301

$\angle FCH$ 和$\angle GEF$ 是一组内错角，于是可应用与内错角有关的平行线的基本图形的性质进行证明，就可得$\angle FCH=\angle GEF$(图 2-4-297).

从而就可推得$\angle GEF=\angle GDO$，而由 $EO$、$DF$ 相交于 $G$，又可得 $\angle EGF=\angle DGO$，所以 $\triangle EGF\backsim\triangle DGO$，分析就得以完成.

(3) 当问题转化为证$\angle GEF=\angle GDO$ 后，由于$\angle GEF$ 是$\odot O$ 的一个圆外角(图 2-4-298)，根据圆外角的性质，$\angle GEF$ 等于 $\overset{\frown}{BC}$ 和 $\overset{\frown}{AF}$ 所对的圆周角之差.

而由 $CD\perp AB$，且 $AB$ 是$\odot O$ 的直径，可得 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$.

所以问题又转化为证$\angle GEF$ 等于 $\overset{\frown}{BD}$ 和 $\overset{\frown}{AF}$ 所对的圆周角之差.但现在图形中这两条弧所对的圆周角都尚未出现，所以应先将这两个圆周角添上.于是联结 $AD$(图 2-4-299)，可得 $\overset{\frown}{BD}$ 所对的圆周角$\angle BAD$，同时可得 $\overset{\frown}{AF}$ 所对的圆周角$\angle ADF$.于是可得$\angle GEF=\angle BAD-\angle ADF$，又因为 $OA=OD$，所以$\angle OAD=\angle ODA$，从而可得$\angle GEF=\angle ODA-\angle ADF$，即$\angle GEF=\angle GDO$，所以分析就得以完成.

(4) 本题的分析在得到$\triangle EGF$ 和$\triangle DGO$ 是由三角形外一条边的逆平行线段得到的逆平行线型相似三角形后，问题也可转化为证 $EG\cdot OG=FG\cdot DG$ 的等价性质$\angle EFG=\angle DOG$(图 2-4-300).

由 $F$、$D$、$B$、$C$ 四点共圆，且 $E$、$F$、$C$ 成一直线，可应用圆周角的基本图形的性质，即圆内接四边形的性质进行证明.但现在图形中这个圆内接四边形尚不完整，所以应先将这个圆内接四边形添完整.于是联结 $BC$、$BD$，可得$\angle EFG=\angle CBD$(图 2-4-301).这样问

题就转化为证$\angle CBD=\angle DOA$.由于$\angle CBD$是$\odot O$的一个圆周角,所以$\angle CBD$的度数$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CAD}$的度数,又因为$CD\perp AB$,且$AB$是$\odot O$的直径,所以$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$,从而可得$\angle CBD$的度数$=\overset{\frown}{AD}$的度数.又由$\angle DOA$是$\odot O$的一个圆心角,故$\angle DOA$的度数$=\overset{\frown}{AD}$的度数,从而就可证明$\angle CBD=\angle DOA$,分析就得以完成.

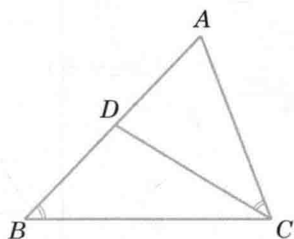


图 2-4-302

(三) 过三角形顶点的逆平行线型

$\triangle ABC$中,$D$是$AB$上的一点,$\angle ACD=\angle ABC$ $\Rightarrow \triangle ACD\backsim\triangle ABC\Rightarrow AC^2=AD\cdot AB$,$AC$与$\triangle BCD$的外接圆相切于$C$(图 2-4-302)

在几何问题中,出现了两组相乘两线段重叠在一直线上,且其中一组是线段的平方的情况时,可以应用或添加过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明,这时过端点、内分点和重合顶点的连线就是逆平行线.

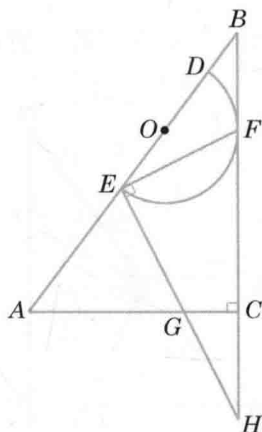


图 2-4-303

【例 23】已知:$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90^\circ$,$BC=\frac{4}{3}AC$,$O$是$AB$上的一点,以$O$为圆心作半圆,$AB$交半圆$O$于$D$、$E$,$BC$与半圆$O$相切于$F$,联结$EF$,过$E$作$EH\perp FE$交$BC$的延长线于$H$,$AC$、$EH$相交于$G$.(图 2-4-303)

求证:$CH=2CG$.

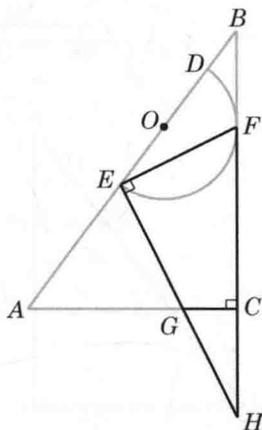


图 2-4-304

分析:本题要证明的结论是$CH=2CG$,由$HE\perp FE$,$\angle HEF=90^\circ$,且$\angle HCG=90^\circ$,可知$CG$是$\triangle HEF$内一条边$EF$的逆平行线,于是可应用由三角形内一条边的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明,可得$\triangle HGC\backsim\triangle HFE$(图 2-4-304),

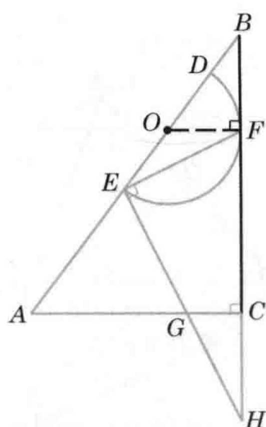


图 2-4-305

所以$\frac{HC}{HE}=\frac{CG}{EF}$,也就可得$\frac{HC}{CG}=\frac{HE}{EF}$.

这样问题就转化为证明 $HE=2EF$.

由于 $BH$ 与半圆 $O$ 相切于点 $F$,因此可应用切线的性质,即切线垂直于过切点的半径的性质进行证明.但现在图形中是有切线,而没有过切点 $F$ 的半径,所以应先将这条半径添上,于是联结 $OF$(图 2-4-305),可得 $OF\perp BC$,$\angle OFB=90°$.

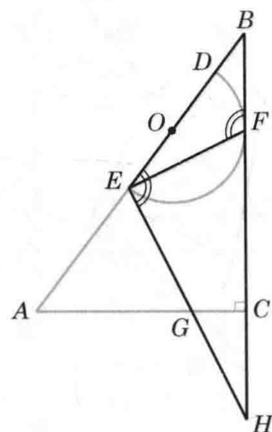


图 2-4-306

又因为 $OF$、$OE$ 是同圆的两条半径,即 $OE=OF$,所以应用等腰三角形的性质,可得$\angle OEF=\angle OFE$,而$\angle FEH=90°$,所以$\angle BFE=\angle BEH$,那么 $FE$、$EH$ 是两条逆平行线,$\triangle BEF$ 和$\triangle BHE$ 就是一对由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形(图 2-4-306),于是可得$\frac{EF}{HE}=\frac{BF}{BE}$.

这样问题又进一步转化为证明 $BE=2BF$.因为$BC=\frac{4}{3}AC$,且已经证明 $OF\parallel AC$,所以 $OF$ 是$\triangle BAC$ 内一条边 $AC$ 的平行线段(图 2-4-307),从而可应用由三角形内一条边的平行线得到的平行线型相似三角形进行证明,可得$\triangle BOF\backsim\triangle BAC$,所以$\frac{BF}{BC}=\frac{OF}{AC}$.也就可得$\frac{BF}{OF}=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{3}$,$BF=\frac{4}{3}OF$.

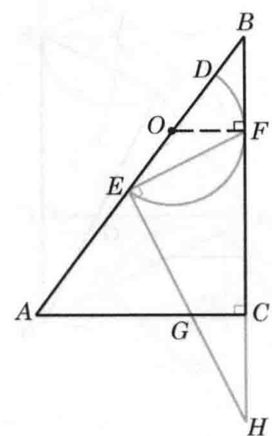


图 2-4-307

这是直角三角形两条直角边之间的数量关系,可应用勾股定理进行证明.在直角三角形 $OBF$ 中,$OB^2=OF^2+BF^2$,$BF=\frac{4}{3}OF$,计算可得 $OB=\frac{5}{3}OF$,所以 $OF=\frac{3}{5}OB$,$BF=\frac{4}{5}OB$,于是 $BE=OB+OE=$

$OB+OF=OB+\frac{3}{5}OB=\frac{8}{5}OB$，也就可以证明 $BE=2BF$，分析就得以完成.

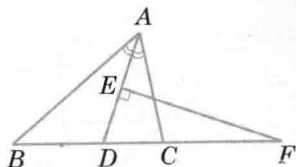


图 2-4-308

【例 24】已知：$\triangle ABC$ 中，$AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，$AD$ 的垂直平分线交 $AD$ 于 $E$、交 $BC$ 的延长线于 $F$.（图 2-4-308）

求证：$FD^2=FC\cdot FB$.

分析：本题要证明的结论 $FD^2=FC\cdot FB$ 是线段之间的比例关系，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

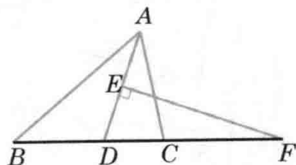


图 2-4-309

经过描图可以发现，两组相乘线段 $FD$、$FD$ 和 $FC$、$FB$ 都重叠在一直线上（图 2-4-309），可应用或添加逆平行线型相似三角形进行证明.

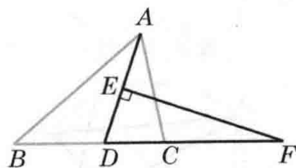


图 2-4-310

由于现在 $FD$ 也重叠在 $FB$ 上，因此它们不可能直接组成相似三角形，必须使 $FD$“离开”$FB$.

又因为 $EF$ 是 $AD$ 的垂直平分线，所以可应用线段的垂直平分线的性质，即等腰三角形中重要线段的基本图形的性质进行证明（图 2-4-310）. 由于这个等腰三角形有底边 $AD$ 和一条腰 $FD$，而另一条腰尚未出现，因此应先将这条腰添上. 于是联结 $FA$（图 2-4-311），可得 $FA=FD$，可进一步推得 $\angle FAD=\angle FDA$，所以问题转化为证 $FA^2=FC\cdot FB$.

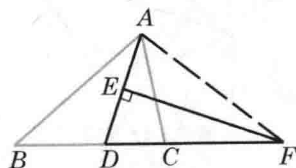


图 2-4-311

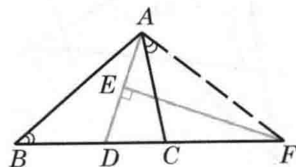


图 2-4-312

由于现在这两组重叠的相乘线段有公共端点 $F$，且比例关系中出现了 $FA^2$（图 2-4-312），因此可应用由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明，找相似三角形的方法是由端点 $B$、内分点 $C$ 与重合的端点 $A$ 的连线组成相似三角

形.于是可找到 $AC$、$BA$ 是两条逆平行线,从而 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CAF$ 是由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形,问题就转化为证 $FA^2=FC\cdot FB$ 的等价性质 $\angle FAC=\angle FBA$.

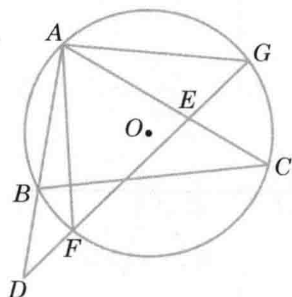


图 2-4-313

由于 $\angle FAC=\angle FAD-\angle CAD$,而已知 $B$、$D$、$F$ 成一直线,$\angle FDA$ 是 $\triangle ABD$ 的一个外角,因此 $\angle FDA=\angle FBA+\angle DAB$,也就可得 $\angle FBA=\angle FDA-\angle DAB$,又因为 $\angle CAD=\angle DAB$,$\angle FAD=\angle FDA$,所以 $\angle FBA=\angle FAC$ 就可以证明.而 $\angle BFA=\angle AFC$ 是公共角,从而就可以证明 $\triangle ABF\backsim\triangle CAF$,分析就得以完成.

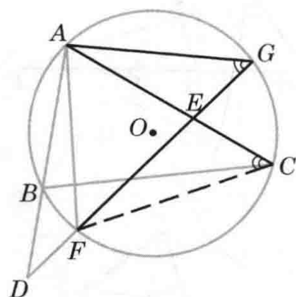


图 2-4-314

【例 25】已知:$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$,延长 $AB$ 到 $D$,使 $AD=AC$,$E$ 是 $AC$ 上的一点,$AE=AB$,过 $D$、$E$ 作直线交 $\odot O$ 于 $F$、$G$,联结 $AF$、$AG$.(图 2-4-313)

求证:$AF\cdot AG=AB\cdot AC$.

分析:由 $A$、$F$、$C$、$G$ 四点共圆,可以应用圆周角的基本图形性质进行证明.由于现在图形中,圆周角的基本图形尚不完整,因此应将圆周角的基本图形添完整.于是联结 $CF$(图 2-4-314),可得 $\angle AGF=\angle ACF$,$\angle ACF=\angle ACB+\angle BCF$.

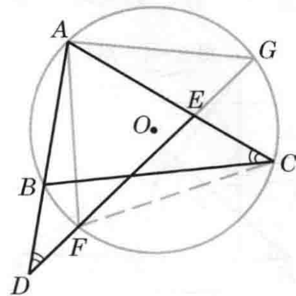


图 2-4-315

由 $A$、$B$、$F$、$C$ 四点共圆,可得 $\angle BCF=\angle FAD$.因为 $AB=AE$、$AC=AD$,且这两组相等线段所夹的 $\angle BAC$ 和 $\angle EAD$ 是公共角,所以可证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 是一对轴对称型全等三角形(图 2-4-315),从而就可证明 $\angle ACB=\angle ADE$.

而由 $D$、$F$、$G$ 成一直线,可知 $\angle AFG$ 是 $\triangle ADF$ 的一个外角,应用三角形外角定理,可得 $\angle AFG=$

$\angle ADE+\angle FAD$.从而就可得$\angle ACF=\angle ACB+\angle BCF=\angle ADE+\angle FAD=\angle AFG$.

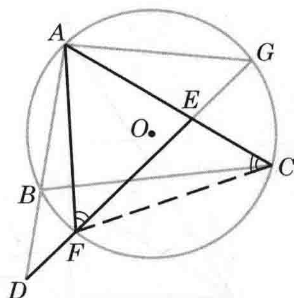


图 2-4-316

因此 $FE$ 是$\triangle AFC$ 中过顶点 $F$ 的边 $FC$ 的逆平行线,可应用由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明.可得$\triangle AFE\backsim\triangle ACF$(图 2-4-316),从而可得$\angle ACF=\angle AFE$ 的等价性质 $AF^2=AE\cdot AC$ 成立.而 $AE=AB$,所以 $AF^2=AB\cdot AC$.

因为要证的结论是 $AF\cdot AG=AB\cdot AC$,所以问题转化为证 $AF=AG$.它们是两条具有公共端点 $A$ 的相等线段,可组成一个等腰三角形,问题也就转化为一个等腰三角形的判定问题,于是要证$\angle AFG=\angle AGF$.又因为这两个角都与$\angle ACF$ 相等,所以分析得以完成.

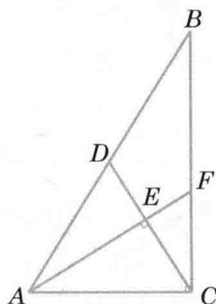


图 2-4-317

【例 26】已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$D$ 是 $AB$ 的中点,联结 $CD$,$AF\perp CD$,垂足是 $E$,$AF$、$BC$ 相交于 $F$.(图 2-4-317)

求证:$CA^2=CF\cdot CB$.

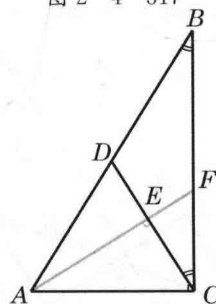


图 2-4-318

分析:本题的条件中给出$\angle ACB=90°$,$D$ 是 $AB$ 的中点,出现了直角三角形的斜边中点,可以添加或应用直角三角形斜边上的中线的基本图形进行证明(图 2-4-318).也就可得 $DC=DB$,$\triangle DCB$ 是等腰三角形.并可进一步推得$\angle DBC=\angle DCB$.

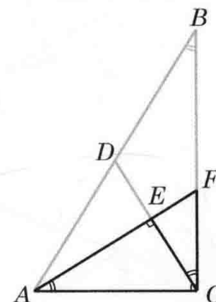


图 2-4-319

又因为 $AF\perp CD$,垂足是 $E$,所以 $CE$ 是直角三角形 $AFC$ 的斜边 $AF$ 上的高(图 2-4-319),于是应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质,可得$\angle ECF=\angle CAF$,所以$\angle CAF=\angle CBA$.

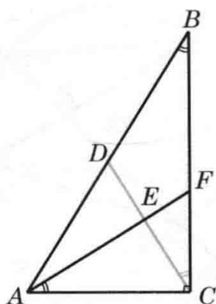


图 2－4－320

所以 $AF$ 是$\triangle BAC$ 内过顶点 $A$ 的边 $CA$ 的逆平行线(图 2－4－320),可应用由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明.也就可得$\triangle ACF\backsim\triangle BCA$,从而就能证明$\angle CAF=\angle CBA$ 的等价性质$\dfrac{CA}{CF}=\dfrac{CB}{CA}$,即 $CA^2=CF\cdot CB$ 成立.

【例 27】已知:$\triangle ABC$ 中,$D$ 是 $AB$ 上一点,$CE\parallel BA$,$CE=BD$,$BE$ 交 $CD$、$CA$ 于 $F$、$G$,$\angle ABG=\angle ACD$.(图 2－4－321)

求证:$FC^2=FB\cdot FG$.

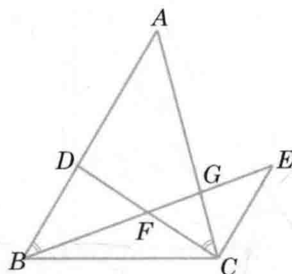


图 2－4－321

分析:本题条件中给出 $CE\parallel BD$,$CE=BD$,同时它们的四个端点两两的连线 $DC$、$BE$ 在点 $F$ 相交(图 2－4－322),所以可应用中心对称型全等三角形进行证明.于是可找到这对全等三角形应是$\triangle BFD$ 和$\triangle EFC$,全等的条件是 $BD=EC$,$\angle FDB=\angle FCE$,$\angle FBD=\angle FEC$.可进一步推得 $FB=FE$.

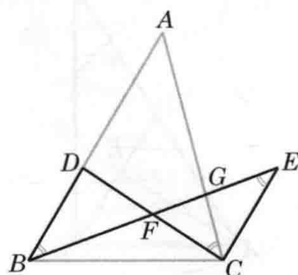


图 2－4－322

这样问题就转化为证 $FC^2=FE\cdot FG$.

对这一比例关系应先进行描图,搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现,$FE$、$FG$ 这两条相乘线段重叠在一直线上(图 2－4－323),可应用逆平行线型相似三角形进行证明.

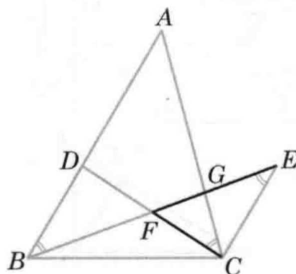


图 2－4－323

由于另一组相乘线段是 $FC^2$,因此可应用过端点的逆平行线组成的相似三角形进行证明.可以找到这对相似三角形是$\triangle GCF$ 和$\triangle CEF$(图 2－4－324).问题也就转化为证 $FC^2=FE\cdot FG$ 的等价性质$\angle GCF=\angle CEF$.

已知$\angle ABG=\angle ACD$，而由$CE /\!/ BA$，可得$\angle ABG=\angle CEF$，所以$\angle GCF=\angle CEF$就得以证明.

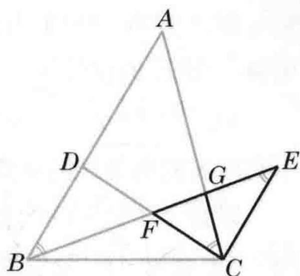


图 2-4-324

（四）直角三角形中的逆平行线型

$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足是$D\Rightarrow\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，$\triangle BCD\backsim\triangle BAC\Rightarrow AC^2=AD\cdot AB$，$BC^2=BD\cdot BA$（图 2-4-325）

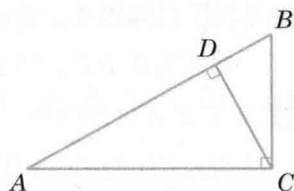


图 2-4-325

显然，由直角三角形斜边上的高得到的逆平行线型相似三角形，是由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形的特殊情况，所以分析方法和添线方法完全相同.

【例 28】已知：$AB$是$\odot O$的直径，$CB$与$\odot O$相切于$B$，$D$是$BC$上的一点，$AC$、$AD$分别交$\odot O$于$E$、$F$.（图 2-4-326）

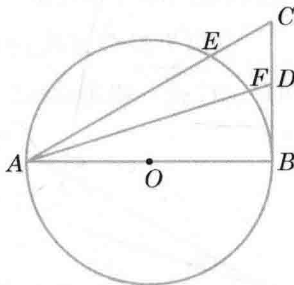


图 2-4-326

求证：$AE\cdot AC=AF\cdot AD$.

分析：(1) 本题要证明的结论$AE\cdot AC=AF\cdot AD$是线段之间的比例关系，首先应进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现，两组相乘线段$AE$、$AC$和$AF$、$AD$都分别重叠在一直线上（图 2-4-327），可应用或添加逆平行线型相似三角形进行证明.

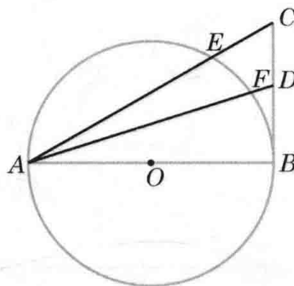


图 2-4-327

由于这两组重叠的相乘线段有一个公共端点$A$，因此添加的方法是将端点和端点、内分点和内分点分别联结起来.于是联结$EF$（图 2-4-328），可得$EF$、$CD$必定是一组逆平行线，$\triangle AEF$和$\triangle ADC$是由三角形内一条边的逆平行线段得到的逆平行线型相似三角形.

这样问题就转化为证$AE\cdot AC=AF\cdot AD$的等价性质$\angle AFE=\angle ACD$.

由$\angle AFE$是一个圆周角(图 2-4-329),应用圆周角的基本图形的性质,可得$\angle AFE$的度数等于$\overset{\frown}{AE}$的度数的一半.

而$\angle ACD$是一个圆外角(图 2-4-330),应用圆外角的性质,它的度数等于它所夹的两条弧的度数之差的一半,也就是$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{BE}$的度数之差的一半.

因为$AB$是$\odot O$的直径,$CB$与$\odot O$相切于$B$,$\overset{\frown}{AB}$就是半圆,所以$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{BE}$之差就是$\overset{\frown}{AE}$,分析得以完成.

(2) 由$AB$是$\odot O$的直径(图 2-4-331),可以想到应用直径的性质,也就是半圆上的圆周角是直角的性质进行证明.

现在图形中有直径$AB$,有半圆上的点$E$,但没有圆周角,所以要将圆周角添上.于是联结$BE$(图 2-4-332),可得$\angle AEB=90^\circ$.

因为$CB$与$\odot O$相切于$B$,应用切线的性质即弦切角的基本图形的性质,可得$\angle ABC=90^\circ$(图 2-4-333),所以$BE$就是直角三角形$ACB$的斜边$AB$上的高,从而可应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质进行证明.

又因为对要证明的比例关系$AE \cdot AC=AF \cdot AD$进行描图,可以发现$AE$、$AC$这一组相乘线段重叠在这个直角三角形的斜边上,所以可应用逆平行

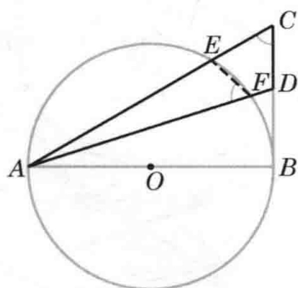


图 2-4-328

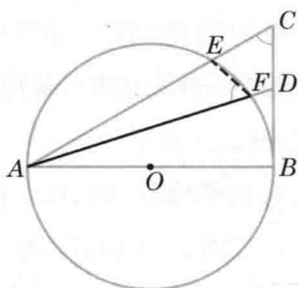


图 2-4-329

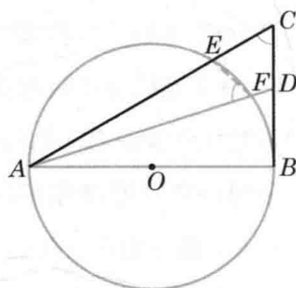


图 2-4-330

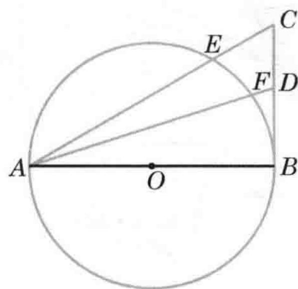


图 2-4-331

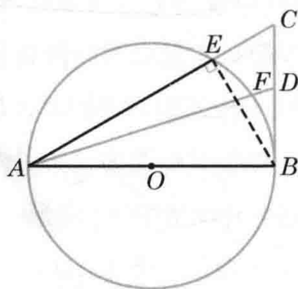


图 2-4-332

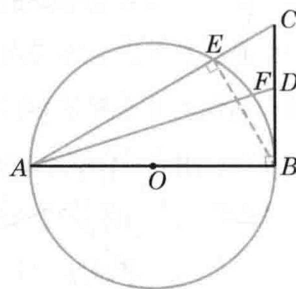


图 2-4-333

线型相似三角形进行证明.可得$\triangle ABE$和$\triangle ACB$是由过直角三角形顶点的逆平行线段得到的逆平行线型相似三角形(图 2-4-334),所以$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AB}{AC}$,$AE\cdot AC=AB\cdot AB=AB^2$.

同理,联结$BF$(图 2-4-335),可得$AF\cdot AD=AB^2$,分析得以完成.

【例 29】已知:$\triangle ABC$内接于$\odot O$,$AD\perp BC$,垂足是$D$,$AD$的延长线与$\odot O$相交于$E$,以$AD$为直径作$\odot O'$,$AB$与$\odot O'$相交于$F$,$AC$与$\odot O'$相交于$G$,$AD$、$FG$相交于$H$.(图 2-4-336)

求证:$AD^2=AH\cdot AE$.

分析:由$AD$是$\odot O'$的直径,可以想到应用直径的性质(图 2-4-337),也就是半圆上的圆周角是直角的性质进行证明.

现在图形中有直径,有半圆上的点$F$,但没有圆周角,所以要将圆周角添上.于是联结$DF$(图 2-4-338),可得$\angle AFD=90°$.

由$AD\perp BC$,可得$\angle ADB=90°$,所以$DF$是直角三角形$ABD$的斜边$AB$上的高(图 2-4-339),从而可应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质进行证明.

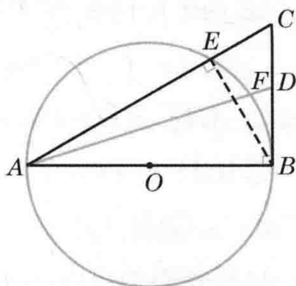


图 2-4-334

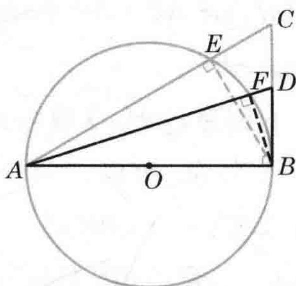


图 2-4-335

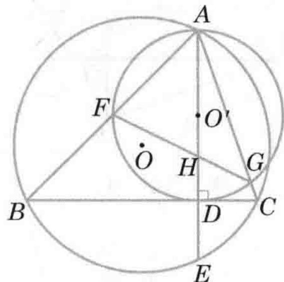


图 2-4-336

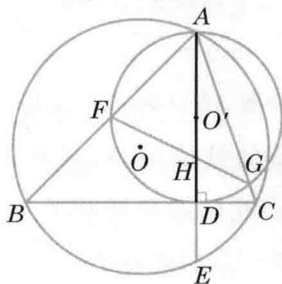


图 2-4-337

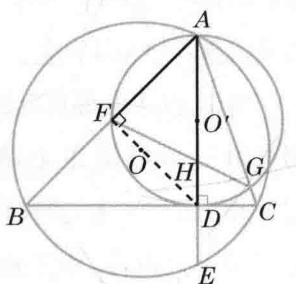


图 2-4-338

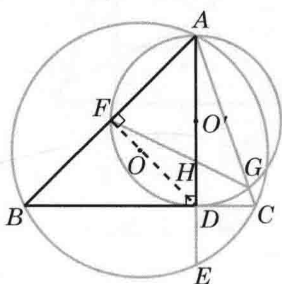


图 2-4-339

又因为结论中出现了 $AD^2$，是一条直角边的平方，所以可应用过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明.可得$\triangle ADF \backsim \triangle ABD$，$AD^2=AF\cdot AB$.这样问题就转化为证明 $AF\cdot AB=AH\cdot AE$.

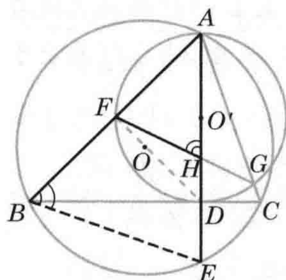


图 2-4-340

这是线段之间的比例关系，首先应进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.经过描图可以发现，两组相乘线段 $AF$ 和 $AB$，$AH$ 和 $AE$ 分别重叠在一直线上，可添加逆平行线型相似三角形进行证明.由于它们有公共的端点 $A$，因此添加相似三角形的方法就是将端点和端点，内分点和内分点分别联结起来.于是联结 $BE$（图 2-4-340），可得$\triangle AHF$ 和$\triangle ABE$ 是一对逆平行线型相似三角形.

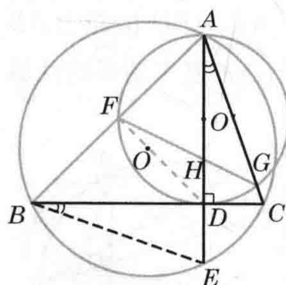


图 2-4-341

由于 $FH$ 和 $BE$ 应是一组逆平行线，因此问题就转化为证 $AF\cdot AB=AH\cdot AE$ 的等价性质$\angle AHF=\angle ABE$.

因为 $F$、$H$、$G$ 成一直线，$\angle AHF$ 是$\triangle AGH$ 的一个外角，所以$\angle AHF=\angle AGH+\angle CAH$，而$\angle ABE=\angle CBE+\angle CBA$，$\angle CAH$（也就是$\angle CAE$）和$\angle CBE$ 都是$\odot O$ 中$\overset{\frown}{CE}$ 所对的圆周角，所以$\angle CAH=\angle CBE$（图 2-4-341）.这样问题就转化为证$\angle AGH=\angle CBA$.

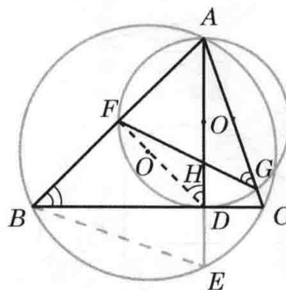


图 2-4-342

由于$\angle CBA$ 是直角三角形 $ABD$ 的一个锐角，应用直角三角形斜边上的高的性质可得$\angle CBA=\angle ADF$（图 2-4-342），因此问题就转化为证明$\angle ADF=\angle AGF$，由于这两个角都是$\odot O$ 中$\overset{\frown}{AF}$ 所对的圆周角，因此相等，分析就得以完成.

如果需要集中进行这类基本图形的教学，可以在《几何王》软件的“智能搜索”功能中，选择左边栏筛选条件中的“基本图形”，鼠标悬停在“相似三角形”，最后点击“逆平行线型”，就可以将所有有关逆平行线型相似三角形的习题全部搜索出来.

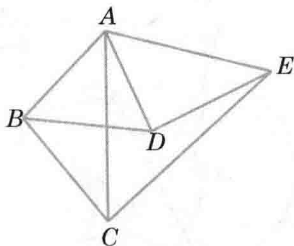


图 2-4-343

### 三、旋转型

（一）两两夹等角的比例线段得到的旋转型

$\angle BAD=\angle CAE$，$\angle ACB=\angle AED\Rightarrow\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，$\triangle ABD\backsim\triangle ACE\Rightarrow AB\cdot AE=AC\cdot AD$（图 2-4-343）

在几何问题中，出现了由一点发出的四条两两交成等角的成比例线段时，就要应用旋转型相似三角形进行证明，找相似三角形的方法是将由这个公共端点发出的四条两两交成等角的成比例线段两两组成相似三角形，也就是将成比例的四条线段的端点两两联结得到相似三角形，且可以得到两对旋转型相似三角形.

在几何问题中，出现了由一点发出的四条两两交成等角的成比例线段时还会出现一种特殊情况，就是其中的两条相乘线段重叠在角平分线上，此时仍然要应用旋转型相似三角形进行证明，找相似三角形的方法也仍然是将由这个公共端点发出的四条两两交成等角的成比例线段两两组成相似三角形.

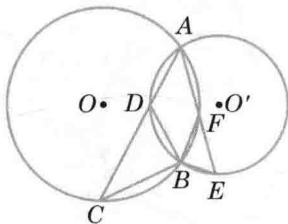


图 2-4-344

【例 30】已知：$\odot O$ 与 $\odot O'$ 相交于 $A$、$B$，$\odot O$ 的弦 $AC$ 交 $\odot O'$ 于 $D$，$\odot O'$ 的弦 $AE$ 交 $\odot O$ 于 $F$，联结 $BC$、$BD$、$BE$、$BF$.（图 2-4-344）

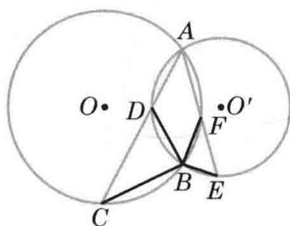


图 2-4-345

求证：$BC \cdot BE = BD \cdot BF$.

分析：本题要证明的结论 $BC \cdot BE = BD \cdot BF$ 是线段之间的比例关系，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现，这是由同一点 $B$ 发出的四条成比例线段(图 2-4-345)，通过观察可以判断它们是两两交成等角的，从而可应用旋转型相似三角形进行证明.

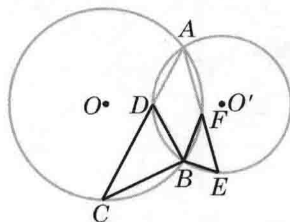


图 2-4-346

(1) 如选取 $BC$、$BD$ 组成$\triangle BCD$，那么 $BF$、$BE$ 就应组成$\triangle BFE$. 问题也就转化为证$\triangle BCD \backsim \triangle BFE$(图 2-4-346).

由 $A$、$C$、$B$、$F$ 四点共圆，且 $A$、$F$、$E$ 成一直线，可得$\angle BCD = \angle BFE$(图 2-4-347).

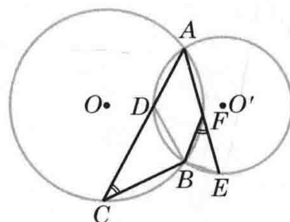


图 2-4-347

同理，由 $A$、$D$、$B$、$E$ 四点共圆，$A$、$D$、$C$ 成一直线，又可得$\angle BDC = \angle BEF$(图 2-4-348).

所以$\triangle BCD \backsim \triangle BFE$ 就可以证明，分析就得以完成.

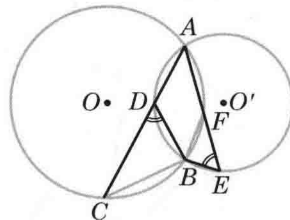


图 2-4-348

(2) 如选取 $BC$、$BF$ 组成$\triangle BCF$，那么 $BD$、$BE$ 就应组成$\triangle BDE$.现在图形中这两个三角形都还未出现，所以应先将这两个三角形添完整. 于是联结 $CF$、$DE$(图 2-4-349). 问题也就转化为证$\triangle BCF \backsim \triangle BDE$.

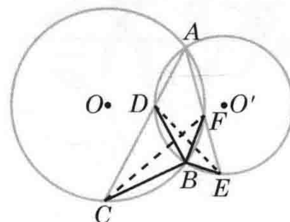


图 2-4-349

由于$\angle BFC$ 是$\odot O$ 的一个圆周角，因此可应用或添加圆周角的基本图形进行证明. 现在图形中$\angle BFC$ 所对的 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的另一个圆周角尚未出现，所以应先将这个圆周角添上. 于是联结 $AB$(图 2-4-350).

于是由条件给出的 $A$、$C$、$B$、$F$ 四点共圆，可得$\angle BFC = \angle BAC$.

又因为 $A$、$D$、$B$、$E$ 四点共圆，又可得 $\angle BAD=\angle BED$（图 2-4-351），所以 $\angle BFC=\angle BED$.

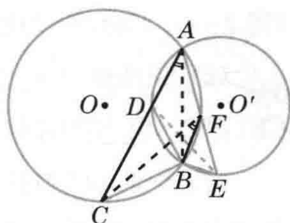


图 2-4-350

同理，由 $A$、$C$、$B$、$F$ 四点共圆，可得 $\angle BCF=\angle BAF$，由 $A$、$D$、$B$、$E$ 四点共圆，可得 $\angle BDE=\angle BAE$，所以 $\angle BCF=\angle BDE$.

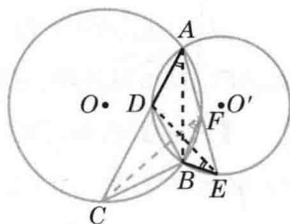


图 2-4-351

所以 $\triangle BCF\backsim\triangle BDE$ 就可以证明，分析就得以完成.

【例 31】已知：$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$AD\perp BC$，垂足是 $D$，$AE$ 是 $\odot O$ 的直径.（图 2-4-352）

求证：$AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

分析：本题要证明的结论 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$ 是线段之间的比例关系，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

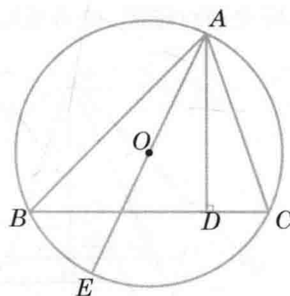


图 2-4-352

经过描图可以发现，这是由同一点 $A$ 发出的四条成比例线段（图 2-4-353），且它们两两交成等角，可添加旋转型相似三角形进行证明. 添加的方法是将由 $A$ 发出的四条成比例线段 $AB$、$AC$、$AD$、$AE$ 两两组成相似三角形.

(1) 如选取 $AC$、$AD$ 组成 $\triangle ACD$，那么 $AE$、$AB$ 组成 $\triangle AEB$. 于是联结 $BE$（图 2-4-354），问题就转化为证 $\triangle ABE\backsim\triangle ADC$.

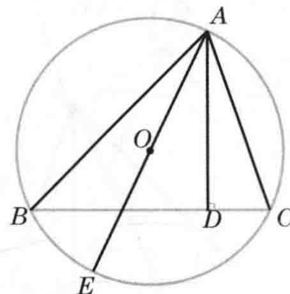


图 2-4-353

由 $AE$ 是 $\odot O$ 的直径，$B$ 是圆上的一点，应用直径的性质，即半圆上的圆周角的基本图形的性质，可得 $\angle ABE=90^\circ$（图 2-4-355）.

而由 $AD$ 是 $\triangle ABC$ 的高，又可得 $\angle ADC=90^\circ$. 所以 $\angle ABE=\angle ADC=90^\circ$.

又因为 $\angle AEB$ 和 $\angle ACD$ 是同弧所对的圆周角

(图 2-4-356),所以相等.故$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$ 就可以证明,分析就得以完成.

(2) 如选择 $AB$、$AD$ 组成$\triangle ABD$,那么 $AE$、$AC$ 组成$\triangle AEC$.于是联结 $CE$(图 2-4-357),问题就转化为证$\triangle ABD \backsim \triangle AEC$.

由 $AE$ 是$\odot O$ 的直径,$C$ 圆上的一点,应用直径的性质,即半圆上的圆周角的基本图形的性质,可得$\angle ACE=90°$(图 2-4-358).

而由 $AD$ 是$\triangle ABC$ 的高,又可得$\angle ADB=90°$.所以$\angle ADB=\angle ACE$.

又因为$\angle ABD$ 和$\angle AEC$ 是同弧所对的圆周角,所以相等.故$\triangle ABD \backsim \triangle AEC$ 就可以证明,分析就得以完成.

【例 32】已知:$\odot O$ 与$\odot O'$相交于 $A$、$B$,过 $B$ 作直线交$\odot O$ 于$C$、交$\odot O'$于 $D$,联结 $AO$、$AC$、$AO'$、$AD$.(图 2-4-359)

求证:$AO \cdot AD=AC \cdot AO'$.

分析:本题要证明的结论 $AO \cdot AD=AC \cdot AO'$,是线段之间的比例关系,应先进行描图,搞清楚比例线段之间的位置关系.

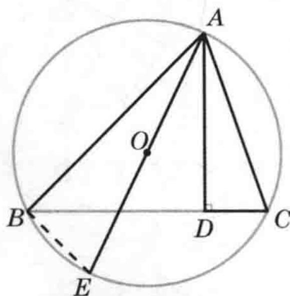


图 2-4-354

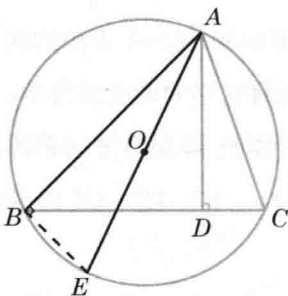


图 2-4-355

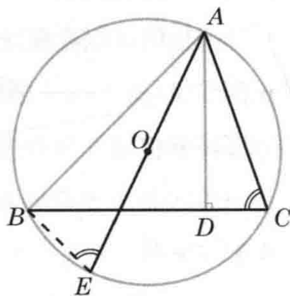


图 2-4-356

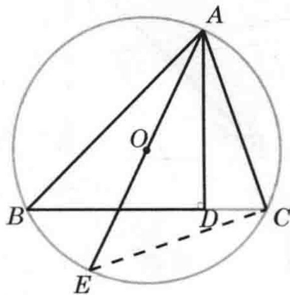


图 2-4-357

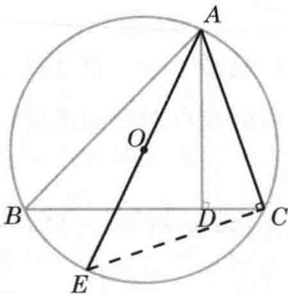


图 2-4-358

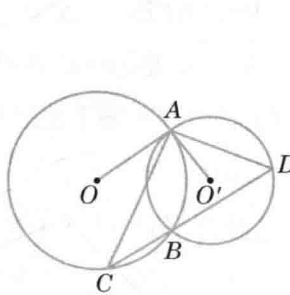


图 2-4-359

经过描图可以发现，这是由同一点 $A$ 发出的四条成比例线段(图 2-4-360)，且它们两两交成等角，可应用旋转型相似三角形进行证明.

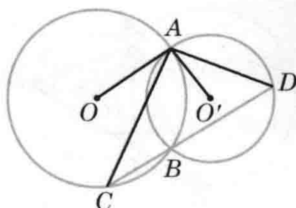


图 2-4-360

(1) 如选择 $AO$、$AO'$组成$\triangle AOO'$，那么 $AC$、$AD$ 组成$\triangle ACD$，现在图形中$\triangle AOO'$还未出现，于是应先将这个三角形添完整，即联结 $OO'$(图 2-4-361)，问题也就转化为证$\triangle AOO' \backsim \triangle ACD$.

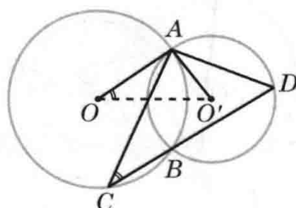


图 2-4-361

于是首先考虑证明$\angle AOO'=\angle ACD$.

由于 $OO'$是相交两圆的连心线，因此可应用相交两圆的性质，即连心线垂直平分公共弦的性质进行证明，但现在图形中公共弦尚未出现，所以应先将公共弦添上.于是联结 $AB$(图 2-4-362)，可得 $OO'$垂直平分 $AB$，$OO'$平分 $\overset{\frown}{AB}$.

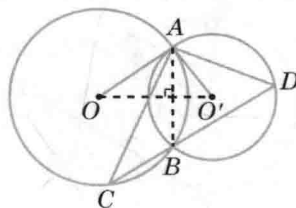


图 2-4-362

于是由$\angle AOO'$是$\odot O$ 的一个圆心角，可得$\angle AOO'$的度数$=\frac{1}{2}$($\odot O$ 的)$\overset{\frown}{AB}$ 的度数.而由$\angle ACB$ 是$\odot O$ 的一个圆周角，也可得$\angle ACB$ 的度数$=\frac{1}{2}$($\odot O$ 的)$\overset{\frown}{AB}$ 的度数.所以$\angle AOO'=\angle ACD$.

同理，又可得$\angle AO'O=\angle ADC$.

所以$\triangle AOO' \backsim \triangle ACD$ 就可以证明，分析就得以完成.

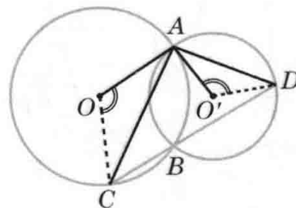


图 2-4-363

(2) 如选取 $AO$、$AC$ 组成$\triangle AOC$，那么 $AO'$、$AD$ 组成$\triangle AO'D$，现在图形中这两个三角形都还未出现，于是应先将这两个三角形添完整，即联结 $OC$、$O'D$(图 2-4-363).问题就转化为证$\triangle AOC \backsim \triangle AO'D$.

由于 $OA=OC$，$O'A=O'D$，因此$\triangle AOC$ 和

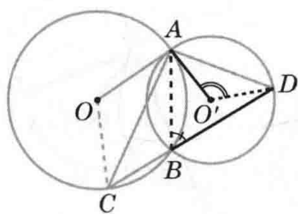


图 2-4-364

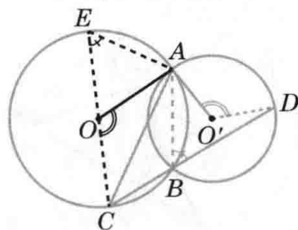


图 2-4-365

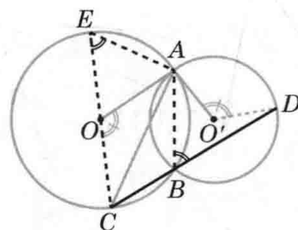


图 2-4-366

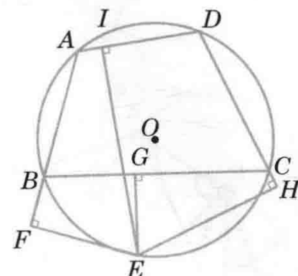


图 2-4-367

$\triangle AO'D$ 都是等腰三角形.于是问题转化为证$\angle AOC=\angle AO'D$.因为$\odot O$、$\odot O'$相交于$A$、$B$,是两个圆的组合问题,所以可以将问题转化为一个圆内的圆周角的基本图形问题来进行证明,转化的方法是添加公共弦.于是联结$AB$(图 2-4-364),可得$\angle AO'D=2\angle ABD$.问题就转化为证$\angle AOC=2\angle ABD$.

由于$\angle AOC$是$\odot O$的圆心角,它应等于它所对的弧所对的圆周角的两倍,而这个圆周角在图形中尚未出现,因此应先将这个圆周角添上.于是延长$CO$交$\odot O$于$E$,联结$AE$(图 2-4-365),可得$\angle AOC=2\angle AEC$.而由$A$、$E$、$C$、$B$四点共圆,且$C$、$B$、$D$成一直线,可得$\angle ABD=\angle AEC$(图 2-4-366).

所以$\angle AOC=\angle AO'D$就可以证明,分析就得以完成.

【例 33】已知:四边形$ABCD$内接于$\odot O$,$E$是$\odot O$上的一点,$EF\perp AB$,垂足是$F$,$EG\perp BC$,垂足是$G$,$EH\perp CD$,垂足是$H$,$EI\perp AD$,垂足是$I$.(图 2-4-367)

求证:$EG\cdot EI=EF\cdot EH$.

分析:本要题要证明的结论$EG\cdot EI=EF\cdot EH$是线段之间的比例关系,应先进行描图,搞清楚它们之间的位置关系.

经过描图可以发现,这是由一点$E$发出的四条成比例线段(图 2-4-368),从而可通过添加旋转型相似三角形进行证明.添加的方法是将这四条线段两两组成相似三角形.

(1) 若考虑将$EF$、$EG$和$EI$、$EH$分别组成三角形,则联结$FG$、$IH$(图 2-4-369),然后证$\triangle EFG$

$\backsim\triangle EIH$.

因为$\angle EFB=\angle EGB=90°$,所以可应用圆周角或圆内接四边形的基本图形的性质进行证明,也就可得 $E$、$F$、$B$、$G$ 四点共圆(图 2-4-370).于是联结 $BE$,可得$\angle EFG=\angle EBG$.

同理,由$\angle EID=\angle EHD=90°$,得 $E$、$I$、$D$、$H$ 四点共圆,联结 $ED$,可得$\angle EIH=\angle EDH$(图 2-4-371).

这样要证明$\angle EFG=\angle EIH$,也就转化为证$\angle EBG=\angle EDH$.

由于 $B$、$E$、$C$、$D$ 四点共圆,因此这两个角相等就可以证明.

根据类似的方法,由 $E$、$F$、$B$、$G$ 四点共圆,可得$\angle EGF=\angle EBF$(图 2-4-372).

由 $E$、$I$、$D$、$H$ 四点共圆,可得$\angle EHI=\angle EDI$(图 2-4-373).

而由 $A$、$B$、$E$、$D$ 四点共圆和 $F$、$B$、$A$ 共线,又可得$\angle EBF=\angle EDA$,所以$\angle EGF=\angle EHI$.从而就可证明$\triangle EFG\backsim\triangle EIH$,分析就得以完成.

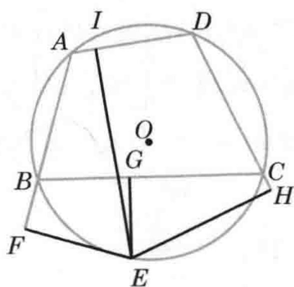


图 2-4-368

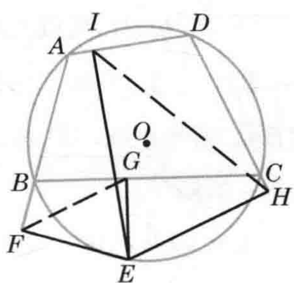


图 2-4-369

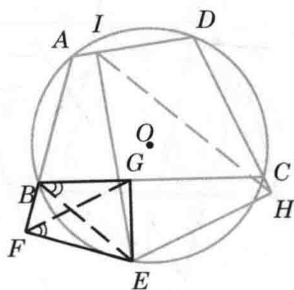


图 2-4-370

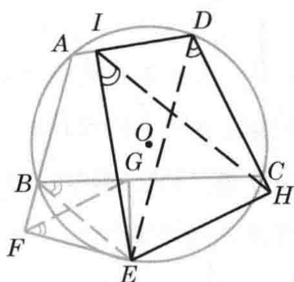


图 2-4-371

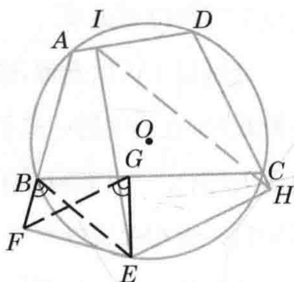


图 2-4-372

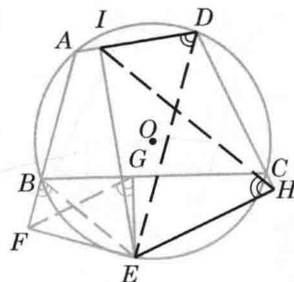


图 2-4-373

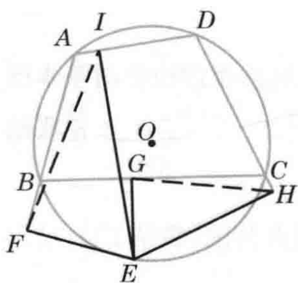


图 2-4-374

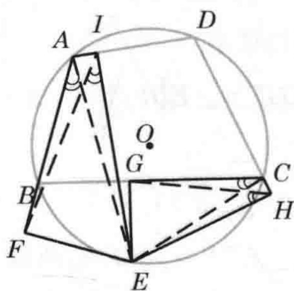


图 2-4-375

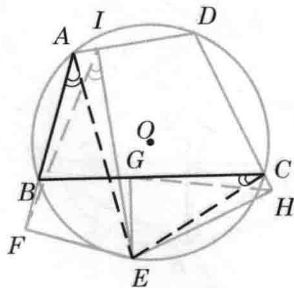


图 2-4-376

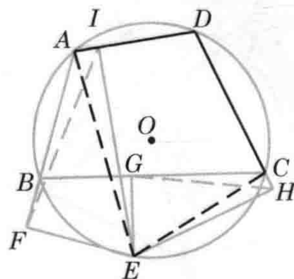


图 2-4-377

(2) 若考虑将 $EF$ 和 $EI$、$EG$ 和 $EH$ 分别组成三角形,则联结 $FI$、$GH$(图 2-4-374),就应证$\triangle EFI \backsim \triangle EGH$.

而由$\angle EFA=\angle EIA=90°$,可得 $E$、$I$、$A$、$F$ 四点共圆,联结 $AE$,得$\angle EIF=\angle EAF$,$\angle EAI=\angle EFI$(图 2-4-375).

再由$\angle EGC=\angle EHC=90°$,又可得 $E$、$H$、$C$、$G$ 四点共圆,联结 $CE$,可得$\angle EHG=\angle ECG$,$\angle EGH=\angle ECH$.

而由 $A$、$B$、$E$、$C$ 四点共圆,可得$\angle BAE=\angle BCE$(图 2-4-376),所以$\angle EIF=\angle EHG$.

而由 $A$、$E$、$C$、$D$ 四点共圆,$D$、$C$、$H$ 成一直线,又可得$\angle ECH=\angle EAD$(图 2-4-377),从而可得$\angle EFI=\angle EGH$,所以$\triangle EFI \backsim \triangle EGH$ 就得以证明.

【例 34】 已知:$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$,$AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,$AD$ 的延长线与$\odot O$ 相交于 $E$.(图 2-4-378)

求证:$AB \cdot AC=AD \cdot AE$.

分析:本题要证明的结论 $AB \cdot AC=AD \cdot AE$ 是线段之间的比例关系,应先进行描图,搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现,这是由一点 $A$ 发出的四条成比例线段,且其中的一组相乘线段 $AD$、$AE$ 重叠在一直线上(图 2-4-379).又由 $AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,可知这一组相乘线段实质上重叠在角平分线上.

从而可添加旋转型相似三角形进行证明.添加的方法是将由 $A$ 发出的四条成比例线段 $AB$、$AC$、$AD$、

$AE$ 两两组成相似三角形.

(1) 如选取 $AC$、$AD$ 组成$\triangle ACD$,那么 $AE$、$AB$ 组成$\triangle AEB$,于是联结 $BE$(图 2-4-380).问题就转化为证$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$.

由$\angle BAE=\angle DAC$,$\angle AEB$ 和$\angle ACD$ 是同弧所对的圆周角(图 2-4-381),所以$\angle AEB=\angle ACD$,所以$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$,分析就得以完成.

(2) 如选择 $AB$、$AD$ 组成$\triangle ABD$,那么 $AE$、$AC$ 组成$\triangle AEC$.于是联结 $CE$(图 2-4-382),问题就转化为证$\triangle ABD \backsim \triangle AEC$.

由$\angle BAD=\angle EAC$,$\angle ABD$ 和$\angle AEC$ 是同弧所对的圆周角,所以$\angle ABD=\angle AEC$ 相等,所以$\triangle ABD \backsim \triangle AEC$,分析就得以完成.

【例 35】已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$CD \perp AB$,垂足是 $D$,$\angle BAC$ 的平分线分别交 $CD$、$BC$ 于 $E$、$F$.(图 2-4-383)

求证:$\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{CF}{BF}$.

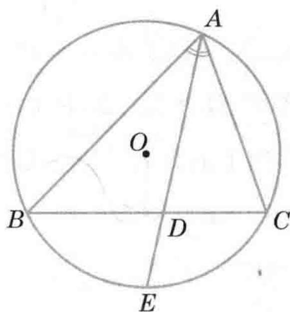


图 2-4-378

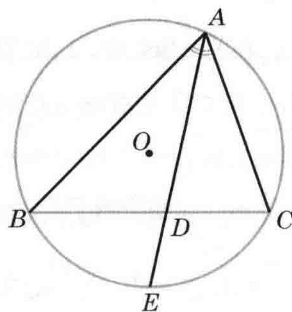


图 2-4-379

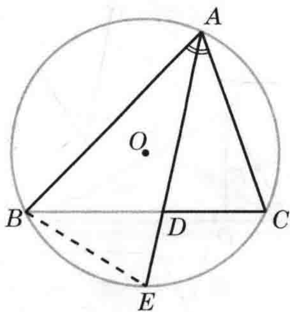


图 2-4-380

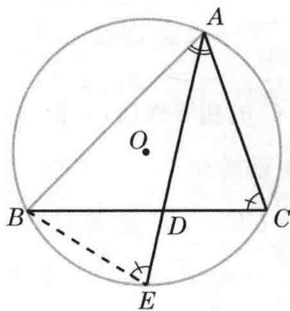


图 2-4-381

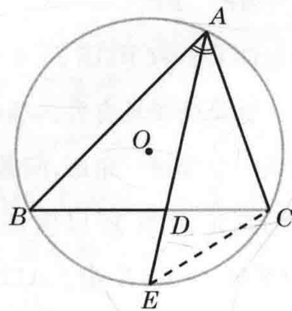


图 2-4-382

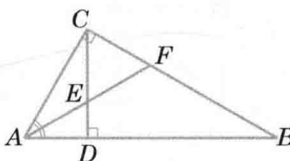


图 2-4-383

分析：(1) 本题要证明的结论是$\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{CF}{BF}$，这是线段之间的比例关系，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

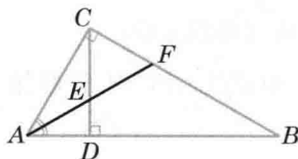


图 2-4-384

经过描图可以发现，$AE$、$AF$ 这两条相比线段重叠在一直线上(图 2-4-384)，又由 $AF$ 是$\angle BAC$ 的平分线，可知这两条相比线段重叠在角平分线上，可应用旋转型相似三角形进行证明.

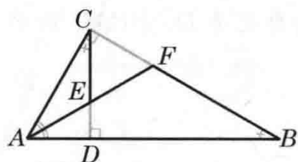


图 2-4-385

于是可找到这对相似三角形是$\triangle AEC$ 和$\triangle AFB$，实际上是旋转以后再翻折得到的相似三角形(图 2-4-385).

在这两个三角形中，已经有$\angle CAE=\angle BAF$，还缺少一个条件.

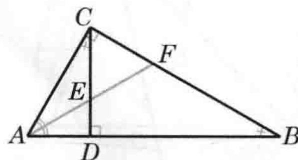


图 2-4-386

在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足是 $D$，于是 $CD$ 是直角三角形 $ABC$ 斜边上的高(图 2-4-386)，可应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质进行证明，可得$\angle ACE=\angle ABF$.

所以$\triangle AEC\backsim\triangle AFB$，$\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{CE}{BF}$.而要证明的结论是$\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{CF}{BF}$，将两式进行比较，可以发现问题转化为证明 $CE=CF$(图 2-4-387).

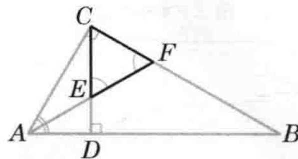


图 2-4-387

这是两条具有公共端点 $C$ 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，问题也就转化为一个等腰三角形的判定问题.所以应证明 $CE=CF$ 的等价性质$\angle CEF=\angle CFE$.由$\triangle AEC\backsim\triangle AFB$，可得$\angle AEC=\angle AFB$，所以$\angle CEF=\angle CFE$ 就可以证明.

（2）本题要证明的结论是$\frac{AE}{AF}=\frac{CF}{BF}$，这是线段之间的比例关系，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

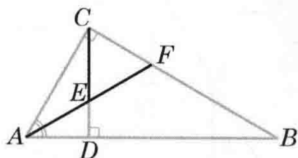


图 2－4－388

经过描图可以发现，$AE$、$AF$ 这两条相比线段重叠在一直线上（图 2－4－388），可添加平行线型相似三角形进行证明.添加的方法是过端点和内分点作平行线.

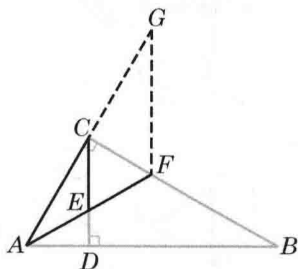


图 2－4－389

由于过内分点 $E$ 的 $CD$ 是直角三角形斜边上的高，因此可取 $EC$ 为平行方向线段.

由于平行方向线段过内分点 $E$，因此平行线应过端点 $F$ 作，并做到与过端点 $A$ 的直线相交，即过 $F$ 作 $FG /\!/ EC$ 交 $AC$ 的延长线于 $G$（图 2－4－389）.可得 $\triangle AEC \backsim \triangle AFG$，$\frac{AE}{AF}=\frac{CE}{GF}$.这样问题就转化为要证 $\frac{CF}{BF}=\frac{CE}{GF}$.

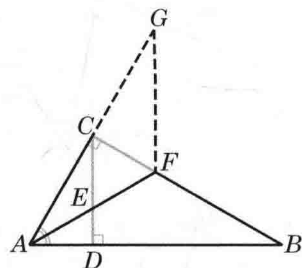


图 2－4－390

由 $AF$ 是$\angle BAC$ 的平分线，$\angle CAF=\angle BAF$，即这两个相等的角关于 $AF$ 成轴对称，因此可应用轴对称型全等三角形进行证明（图 2－4－390）.

根据图形的轴对称部分，可以找到这对全等三角形是$\triangle AFG$ 和$\triangle AFB$，全等的条件已经有$\angle GAF=\angle BAF$，$AF=AF$，还缺少一个条件.

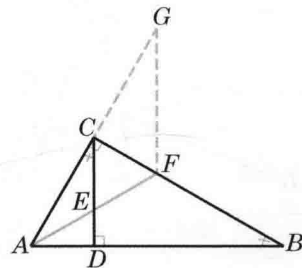


图 2－4－391

因为$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD \perp AB$，垂足是 $D$，即 $CD$ 是直角三角形 $ABC$ 的斜边上的高（图 2－4－391），所以可应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质进行证明，可得$\angle ACD=\angle ABF$.问题也就转化为证明$\angle AGF=\angle ABF$.

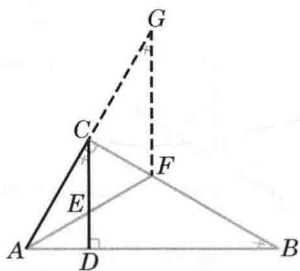


图 2-4-392

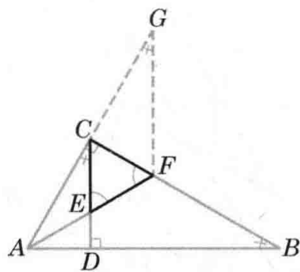


图 2-4-393

因为这两个角是 $CD$、$GF$ 被 $AG$ 所截得到的同位角，而 $FG \parallel EC$（图 2-4-392），所以这两个角相等就可以证明，从而就可得$\triangle AFG \cong \triangle AFB$，$GF=BF$.

而要证明的结论是$\dfrac{CF}{BF}=\dfrac{CE}{GF}$，所以应证 $CF=CE$（图 2-4-393）.

根据$\angle CAF=\angle BAF$ 和$\angle ACD=\angle ABF$，可证得$\angle CEF=\angle CFE$，所以 $CF=CE$ 就可以证明，分析就得以完成.

【例 36】已知：$I$ 是$\triangle ABC$ 的内心，过 $I$ 作 $DE \perp AI$ 并分别交 $AB$、$AC$ 于 $D$、$E$.（图 2-4-394）

求证：$\dfrac{BI^2}{CI^2}=\dfrac{BD}{CE}$.

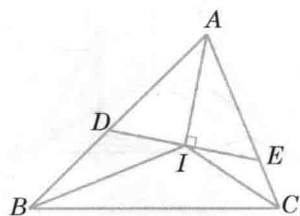


图 2-4-394

分析：本题要证的结论$\dfrac{BI^2}{CI^2}=\dfrac{BD}{CE}$是线段之间的比例关系，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现，$BI$ 和 $BI$ 这两条相乘线段重叠在一直线上（图 2-4-395），而由 $I$ 是$\triangle ABC$ 的内心，即 $BI$ 是$\angle ABC$ 的平分线，所以 $BI$ 和 $BI$ 这两条相乘线段重叠在角平分线上（图 2-4-396）.所以可应用旋转型相似三角形进行证明.

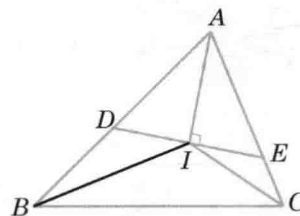


图 2-4-395

由于以 $B$ 为公共端点的四条线段是 $BD$、$BI$ 和 $BI$、$BC$，因此要证$\triangle BDI$ 和$\triangle BIC$ 是一对旋转型相似三角形（图 2-4-397）.条件给出了$\angle DBI=\angle IBC$，还缺少一个条件.

因为$\angle BIC$ 是$\triangle BIC$ 的一个内角（图 2-4-398），所以$\angle BIC=180°-\angle IBC-\angle ICB$.又因为 $CI$

是$\angle ACB$的平分线，所以$\angle IBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ICB=\frac{1}{2}\angle ACB$，从而可得$\angle BIC=180^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC-\frac{1}{2}\angle ACB$，这样就应证$\angle BDI=180^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC-\frac{1}{2}\angle ACB$.

由$A$、$D$、$B$成一直线，可得$\angle BDI=90^\circ+\angle DAI=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC$（图2-4-399），所以就应证$180^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC-\frac{1}{2}\angle ACB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC$.应用三角形内角和定理，就能证明这一性质.

所以$\triangle BDI\backsim\triangle BIC$，$\frac{BD}{BI}=\frac{BI}{BC}$，$BI^2=BD\cdot BC$.

同理可证$\triangle CEI\backsim\triangle CIB$（图2-4-400），$\frac{CE}{CI}=\frac{CI}{CB}$，$CI^2=CE\cdot CB$.

所以$\frac{BI^2}{CI^2}=\frac{BD\cdot BC}{CE\cdot CB}=\frac{BD}{CE}$，分析就得以完成.

【例37】已知：$\triangle ABC$中，$AD$是$\angle BAC$的平分线.（图2-4-401）

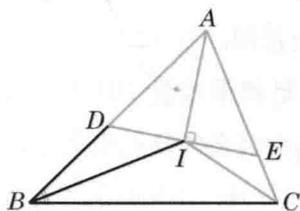


图2-4-396

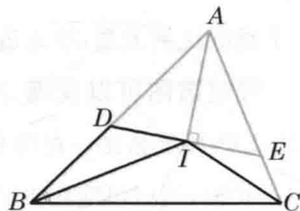


图2-4-397

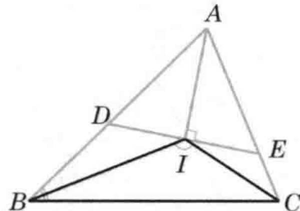


图2-4-398

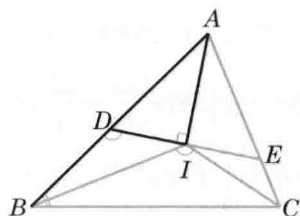


图2-4-399

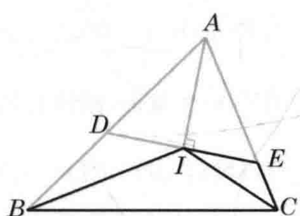


图2-4-400

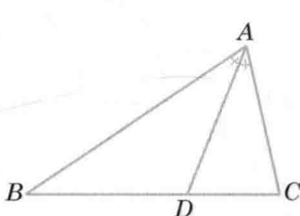


图2-4-401

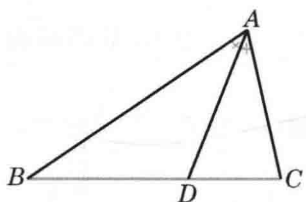


图 2-4-402

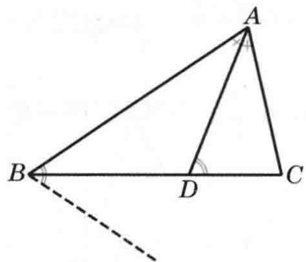


图 2-4-403

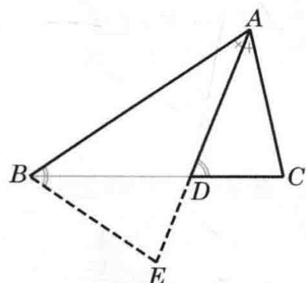


图 2-4-404

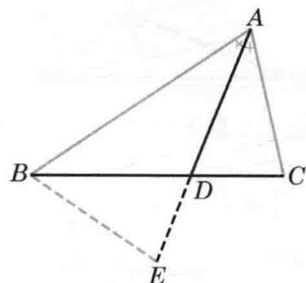


图 2-4-405

求证：$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$.

分析：本题要证的结论 $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$ 是线段之间的比例关系，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现，$AD$、$AD$、$AB$、$AC$ 是由点 $A$ 发出的四条成比例线段.且 $AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线，即 $AD$ 和 $AD$ 这两条相乘线段重叠在角平分线上(图 2-4-402)，可应用或添加旋转型相似三角形进行证明.

已知$\angle BAD=\angle DAC$，所以添加旋转型相似三角形的方法是以 $BA$ 为边，以 $B$ 为顶点作$\angle ABE=\angle ADC$ 交 $AD$ 的延长线于 $E$(图 2-4-403).

就可得$\triangle ABE\backsim\triangle ADC$(图 2-4-404)，$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$，从而可得 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

问题就转化为证 $AD^2=AD\cdot AE-BD\cdot CD$，即证明 $BD\cdot CD=AD(AE-AD)=AD\cdot ED$.这是一个新的比例关系，应先进行描图.

经过描图可以发现，两组相乘线段 $BD$、$CD$ 和 $AD$、$ED$ 都重叠在一直线上，而且在内分点相交(图 2-4-405)，所以可应用由三角形外一条边的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明.

于是由 $AE$、$BC$ 相交于 $D$，可得$\angle BDE=\angle ADC$.而由$\triangle ABE\backsim\triangle ADC$(图 2-4-406)，又可得$\angle BED=\angle ACD$，所以$\triangle BDE\backsim\triangle ADC$，$\frac{BD}{AD}=\frac{ED}{CD}$，也就可以推得 $BD\cdot CD=AD\cdot ED$，分析就得以完成.

(二) 直角三角形中的旋转型

$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足是 $D\Rightarrow$

$\triangle ACD \backsim \triangle CBD \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD$(图 2－4－407)

由直角三角形斜边上的高得到的旋转型相似三角形是一般的旋转型相似三角形的特殊情况，即旋转角等于 90°，所以分析方法和添线方法也都相同.

【例 38】已知：$AB$ 是⊙$O$ 的直径，$C$ 是 $AB$ 上的一点，$CD \perp AB$，$CD$ 与⊙$O$ 相交于 $E$，$AD$ 与⊙$O$ 相交于 $F$，$BF$、$CD$ 相交于 $G$.(图 2－4－408)

求证：$CE^2 = CG \cdot CD$.

分析：本题的条件中给出 $AB$ 是⊙$O$ 的直径(图 2－4－409)，所以可应用直径的性质，也就是半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明.

现在图形中有⊙$O$ 的直径 $AB$，有半圆上的点 $E$，而没有圆周角，应先将圆周角添上.于是联结 $AE$、$BE$，可得$\angle AEB = 90°$(图 2－4－410).

又因为 $EC \perp AB$，$\angle ACE = 90°$，所以 $EC$ 就成为直角三角形 $ABE$ 的斜边 $AB$ 上的高.从而可应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质进行证明(图 2－4－411).

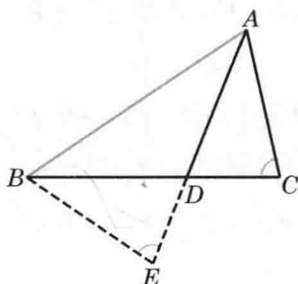


图 2－4－406

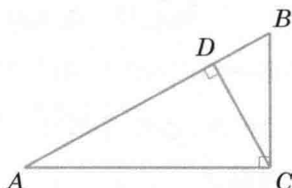


图 2－4－407

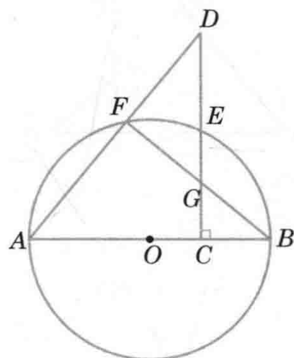


图 2－4－408

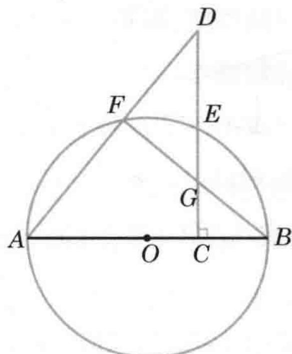


图 2－4－409

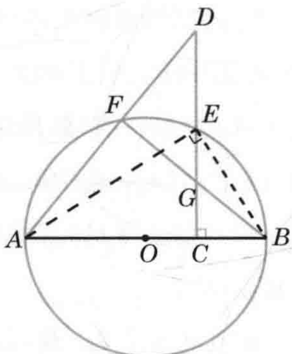


图 2－4－410

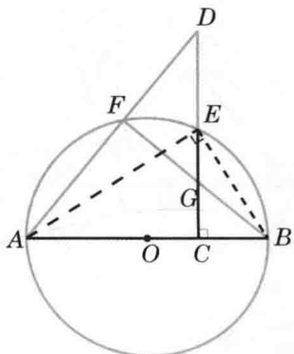


图 2－4－411

由于结论中出现了斜边上的高 $CE$ 的平方，即相乘两线段重叠在一个平角的角平分线上，因此可应用由直角三角形斜边上的高得到的旋转型相似三角形进行证明.可得 $CE^2=CA\cdot CB$.

而本题要证明的结论是 $CE^2=CG\cdot CD$，这样问题就转化为证 $CA\cdot CB=CG\cdot CD$.

这是一个新的线段之间的比例关系，应先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

D F E G A O C B

图 2-4-412

经过描图可以发现，这是由点 $C$ 发出的四条两两交成直角的成比例线段，且相乘线段 $CG$、$CD$ 重叠在一个平角的角平分线(图 2-4-412)，从而可添加旋转型相似三角形进行证明.添加的方法是将由 $C$ 发出的四条成比例线段 $CA$、$CD$、$CG$、$CB$ 两两组成相似三角形.

D F E G A O C B

图 2-4-413

(1) 如选择 $CA$、$CD$ 组成$\triangle ADC$，那么 $CG$、$CB$ 组成$\triangle GBC$(图 2-4-413)，问题就转化为证$\triangle ADC\backsim\triangle GBC$.已知$\angle ACD=\angle GCB=90°$，所以还缺少一个条件.

由于 $AB$ 是$\odot O$ 的直径，$F$ 是半圆上的点，应用半圆上的圆周角的基本图形的性质，可得$\angle AFB=90°$，所以 $A$、$C$、$G$、$F$ 四点共圆(图 2-4-414)，又因为 $F$、$G$、$B$ 成一直线，所以$\angle BGC=\angle DAC$，从而就可证明$\triangle ADC\backsim\triangle GBC$，分析就得以完成.

D F E G A O C B

图 2-4-414

(2) 如选择 $CA$、$CG$ 组成$\triangle AGC$，那么 $CD$、$CB$ 组成$\triangle DBC$.

但现在这两个三角形都尚未出现，所以应先将这两个三角形添完整.于是联结 $AG$、$DB$(图 2-4-

415)，问题就转化为证$\triangle AGC \backsim \triangle DBC$.

已知$\angle ACG=\angle DCB=90^\circ$，还缺少一个条件，也就是要证明$\angle GAC=\angle BDC$.

由于$AB$是$\odot O$的直径，$F$是半圆上的点，应用半圆上的圆周角的基本图形的性质，又可得$\angle AFB=90^\circ$，因此$G$是$\triangle DAB$的垂心.从而可得$AG\perp DB$，于是可得$\angle GAC+\angle ABD=90^\circ$，又因为$\angle BDC+\angle ABD=90^\circ$，所以$\angle GAC=\angle BDC$可以证明，分析也就得以完成.

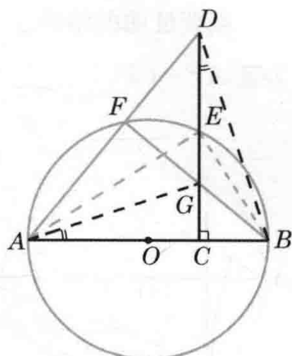


图 2-4-415

【例 39】已知：$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，以$AC$为直径作$\odot O$，$AB$与$\odot O$相交于$D$，$DE /\!/ CA$，$DE$与$\odot O$相交于$E$，$EF\perp AC$，$EF$与$\odot O$相交于$F$，联结$AF$.(图 2-4-416)

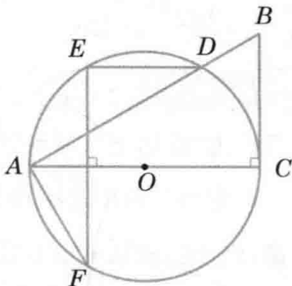


图 2-4-416

求证：$AF^2=AD\cdot BD$.

分析：本题条件中出现$AC$是$\odot O$的直径，$D$是半圆上的点，所以可应用直径的性质，也就是半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明.

由于图形中有直径，有半圆上的点，而尚未出现这个圆周角，因此应先将这个圆周角添上.于是联结$CD$(图 2-4-417)，可得$\angle CDA=90^\circ$.

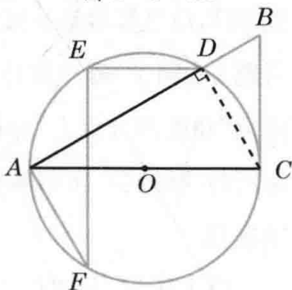


图 2-4-417

由$\angle ACB=90^\circ$，即$CD$是直角三角形$ABC$的斜边$AB$上的高(图 2-4-418)，从而可应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质进行证明.

因此结论中出现的$AD\cdot BD$是斜边被斜边上的高的垂足所分成的两条线段的积，所以可应用直角三角形斜边上的高所得到的旋转型相似三角形进行证明.也就可得$CD^2=AD\cdot BD$.

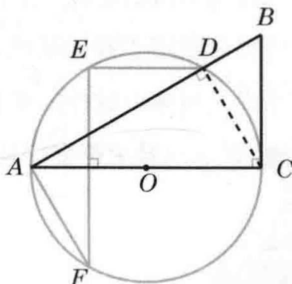


图 2-4-418

而要证明的结论是 $AF^2=AD\cdot BD$，将两式进行比较，可以发现问题转化为证 $AF=CD$.

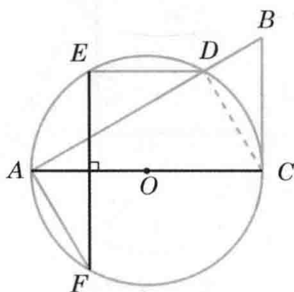


图 2-4-419

由 $AC$ 是⊙$O$ 的直径，$EF$ 是⊙$O$ 的弦，且 $EF\perp AC$，出现了垂直于弦的直径.于是应用垂径定理(图 2-4-419)，可得 $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AE}$.

由 $DE\parallel CA$，又可得 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}$，所以 $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{CD}$.

所以 $AF=CD$ 可以证明，分析就得以完成.

如果需要集中进行这类基本图形的教学，可以在《几何王》软件的"智能搜索"功能中，选择左边栏筛选条件中的"基本图形"，鼠标悬停在"相似三角形"，然后点击"旋转型"，就可以将所有有关旋转型相似三角形的习题全部搜索出来.

相似三角形是平面几何教学中最重要的内容，例题和习题的量都非常丰富，内涵的信息量也非常大，任何一本传统的纸质教材、参考资料或习题集都很难撰写出这样丰富的内容.但智慧教育软件在包含的信息容量上完全可以做到.而当信息容量达到海量时，还必须使教师、学生能很方便地搜索到所需要的习题.《几何王》软件就是一款致力于做到这一点的智慧教育软件.只要在"智能搜索"功能部分点击"相似三角形"，然后点击任何一个图标，就会展示这一个图标所包含的同一类型的相似三角形的题目，包括同一种添线方法的相似三角形的题目.

综上所述，基本图形分析法从根本上揭示了几何问题分析方法的规律性，可以基本讲清楚每一个几何问题的思维过程，这就为实现几何问题的思维过程可视化奠定了理论基础，也就使以基本图形分析法为基础理论的《几何王》初中平面几何学习软件的成功研制有了可能，进而通过《几何王》软件的应用，成功地、详尽地展示更多的几何问题的完整的思维过程.

# 第三章　透明的几何

# 第一节　教育信息化概述

《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》明确提出:"信息技术对教育发展具有革命性影响,必须予以高度重视……重点加强农村学校信息基础建设,缩小城乡数字化差距."

《教育信息化十年发展规划(2011—2020年)》勾画了教育信息化发展的蓝图:"到2020年,全面完成《教育规划纲要》所提出的教育信息化目标任务,形成与国家教育现代化发展目标相适应的教育信息化体系,基本建成人人可享有优质教育资源的信息化学习环境,基本形成学习型社会的信息化支撑服务体系,基本实现所有地区和各级各类学校宽带网络的全面覆盖,教育管理信息化水平显著提高,信息技术与教育融合发展的水平显著提升."

《教育信息化"十三五"规划》也提出了近期教育信息化发展的任务,加快推动信息技术与教育教学融合创新发展.如:大力推进"三通两平台"的建设与应用;完善偏远农村中小学信息化基础设施建设;深入开展"一师一优课、一课一名师"活动,加快推进"网络学习空间人人通",提高师生信息素养,普及信息化教学常态应用;完善国家教育资源公共服务体系;充分利用市场机制建设在线开放课程等优质数字教育资源,推进线上线下结合的课程共享与应用;推动教育信息管理系统的整合与应用.

党和政府对教育信息化工作的重视,信息技术在当今社会迅猛发展的态势,为教育信息化的发展提供了良好的社会环境条件.推进教育信息化发展的力度,教育信息化发展的深度和广度,也都达到了前所未有的水平.

然而,无论是在国内还是在国际上,教育信息化的建设和发展面临着前所未有的挑战.苹果公司创始人乔布斯生前提出了一个著名的"乔布斯之问":"为什么计算机改变了几乎所有领域,却唯独对学校教育的影响小得令人吃惊?"显

然，教育信息化的推进和发展似乎遇到了一道无法逾越的坎.

这种状况的出现值得我们深思，教育信息化或者“互联网＋教育”的特殊性到底是什么？到底应该怎样走出一条教育信息化正确的、成功的发展道路？

我们可以先回顾一下教育信息化发展的历程.在相当长的一段时间里，一批一批的专家学者、领导和一线教师、专业信息技术研究人员克服了重重困难，执着追求，孜孜不倦，刻苦钻研，无私奉献，进行了大量的实践、研究和探索，在做出许多重要贡献的基础上，将教育信息化事业一步步地向前推进.

教育信息化的起步，实际上就是电化教育阶段，主要形式是教学幻灯片的使用，硬件设备主要是幻灯机和投影机.对于教师来说，制作教学幻灯片很不容易，所以很难进行大规模的、常态化的教学应用.

伴随着摄录像设备的普及化应用，教育信息化进入了第二个阶段，就是大量摄制教学录像和进行教学播放的阶段.当时，许多学校的领导和教师，都有这样一种普遍的想法：我们有最优秀的教师，把最优秀的教师所执教的课全程录下来，就是优质教育资源，就可以给广大教师观摩和使用.当时，各地都进行了大量的教学录像摄制工作，建立了各个层次的教学录像资源库.但当这些资源库建立起来以后，却很少有教师使用，甚至连光顾查阅的教师也越来越少，直到几乎没有.这实际上标志着一个阶段的最终落幕.

随着以电脑和互联网为核心的信息技术的崛起和迅猛发展，教育信息化又迈入了新的发展阶段.教学视频、在线教学、教育信息平台建设、智能教学设备等各种新的信息技术应用的形式、方法、内容、手段和设备不断问世、创新、升级、应用，普及的程度得到持续提高，其发展速度和规模都堪称空前未有.然而，许多有识之士在高度评价教育信息化所取得的巨大成就的同时，也清醒地看到教育信息化所面临的根本问题还是没有解决.他们经常将信息技术和教育教学之间关系的现状，比喻为浮在水面上的油和水的关系，实质上就是指信息技术的应用，一直处于一种游离于学科教学、课堂教学以外，没有实现真正意义上融合的状况.

长期以来，我们的教育信息化工作为什么解决不了这个深度融合的问题呢？最根本的原因就是信息技术和教育教学几乎完全脱节，几乎是两个互相独立、毫不相关的系统.

现在我们许多学校都配置了电脑教室，但实地一看，电脑教室的主要功能是供计算机(技术)课使用，而不是用于学科教学.从常态化的教学要求来看，要一个年级的几个班级同时执教学科的计算机教学，对许多学校来说，都是不可能实现的目标.我们对学科教师也提出了计算机应用能力的目标和要求，但这些目标和要求也是重在掌握计算机技术本身而不是应用信息技术进行学科的课堂教学上.出现这种状况的原因，主要是从事信息技术(包括硬件和软件)研制的专家大多不了解、不熟悉教育教学，而优秀的教育教学专家、教师大多也不了解、不熟悉信息技术，以至深度融合的问题至今未能得到有效的解决.

教育信息化建设是否成功有一条硬指标，就是教师是否用——是否常态化地用，是否有成效地用.教育信息技术的成果或产品，无论功能设计得多么强大，只要看一看有多少教师和学生在使用，其价值和优劣就立见分晓.对于目前的一些教育信息技术产品或资源，为什么教师和学生不用或很少用呢?许多教师的回答是没法用.虽然现在网络资源非常多，但教师要找到他所需要的有针对性的、实用的内容却非常困难，往往花了很多时间和精力也找不到，怎么能用呢?

“融合”“应用”这两个词语，对教育信息化来说是如此重要，但要落实却又如此艰难，这就需要我们花大力气、下苦功夫去研究和解决.

教育信息化建设，从科学的层面上讲，是由两个子系统组成的，即硬件系统和软件系统.

综观我们教育信息化的硬件建设，尽管发展的过程经历了许多艰难曲折，但由于各级政府、教育行政部门的重视和逐年加大的资金、设备投入，我们在硬件建设方面已经取得了显著的成绩，许多发达地区、中等发达地区的部分学校的硬件配置比起发达国家也毫不逊色.

按照国家关于教育信息化建设的要求，到 2016 年，全国中小学互联网接入率将达到 95%，其中 10 M 以上宽带接入比例达到 60%以上，基本实现全国中小学都拥有多媒体教学条件，学校普通教室全部配备多媒体教学设备的城镇和农村中小学比例分别达到 80%和 50%.这也体现了我们对硬件建设的高度要求.

然而，对教育信息化建设来说，仅有硬件显然是不够的.教育信息化所追求的目标是信息技术和学科教学的深度融合，其展现形式则是信息技术在课堂教学中的常态化应用.要实现这个目标，只有硬件是不够的.只有硬件，就没有办法做到和学科教学、和学科教学内容的深度融合.只有硬件，也没有办法做到在课堂教学中的常态化应用.当教育信息化的硬件设备配置到一定的水平时，教育信息化建设的关键自然就会转到软件上，需要有一批受教师欢迎并乐以应用的教育软件.

应该说，随着教育信息化建设的深入发展，也出现了不少教育软件，但真正能被教师在学科教学、课堂教学中得到常态化有效应用的软件却少之又少.这些年来，已经问世并能够供师生选用的教育软件主要有四类：一类是教材或教学参考书籍的电子版，一类是辅助性的工具类软件，一类是题库类软件，还有一类是教学录像类软件.通过在教学实践中的应用，可以发现这些软件都还没有从根本上实现在课堂教学中常态化应用的目标，教师的使用率普遍不高.

因此教育软件的研制开发，必须立足于解决提高教师使用率的问题.

我们要研制开发出怎样的教育软件才能实现上述目标呢？多年来的教育实践和研究表明，其必须具备以下的特点和条件.

第一是高效，即能有效弥补传统的教学手段和教学方法的不足，切实提高教学效果.

信息技术在教学中应用所取得的效果，首先体现在教育质量、学科成绩的提高上，这是教师乐于在教学中使用信息技术的动力源.如果一款教育软件的使用，达不到这方面的效果，那么要使教师有持续不断使用的动力，要能得到学校、学生、家长方方面面的支持就是非常困难的.

例如，在传统的平面几何教学中，教师要讲清楚一道题目的思维过程和思维方法，本身就有相当大的难度，更不要说在教学过程中将思维过程形象地、完整地、一步步地展示给学生了.这就直接造成了许多学生对几何学习的畏难，也就影响了教学质量的提高.而以基本图形分析法为基础理论的《几何王》初中平面几何学习软件，就可以将每一个几何问题的思维过程形象地、完整地、一步步

地展示出来，有利于使学生真正理解和掌握，这样几何难教难学的问题也就迎刃而解了，教学质量自然也就得到了明显的提高.许多实验学校的教师都有深切的体会，使用《几何王》软件教学的实验班和普通班相比，不仅学生的几何平均成绩明显高出了一个层次，而且卷面答题过程上也有明显的差异.实验班学生的答题思路更清晰，考卷上没有普通班学生存在的多次涂改的痕迹.实验班的学生答题的速度也明显快于普通班的学生.这都说明实验班学生思维能力的平均水平要高于普通班.在取得了这样的效果的基础上，这些学校的教师产生了强烈的使用《几何王》软件进行常态化教学的积极性.

第二是方便，就是便于教师和学生使用.

教育信息技术的应用，最重要的问题并不是资源的全面和丰富，而是要能方便地搜寻到所需要的、有针对性的信息.

如果一款软件是有效的，甚至也是高效的，但使用却很不方便，那么教师即使偶尔用一次，以后也不会坚持用下去.例如，为了上一节应用信息技术的展示课，教师需要专门的技术人员保驾护航，而在平时常态化的教学中，怎么可能配备同样数量的专业技术人员呢？缺少了这些专业技术人员的支持和配合，教师便会感到应用信息技术不方便，这样他们也就不会经常使用.同样，如果教师很难通过一款软件找到每天要进行的教学活动所需要的、有针对性的内容、素材，或者找到的有关内容并不适用于具体的班级，那么还是不能常态化使用，几次下来，教师也就不用了.

方便，就是要使每一位教师在其具体执教的学校、具体执教的班级，面对所教的学生，针对每一节课的具体内容，能很方便地找到他所需要的素材.要实现这一要求，就必须设置智能搜索功能，要使教师和学生能够通过按尽可能少的按钮，操作尽可能少的动作，就能搜寻到他们所需要的、有针对性的内容.

第三是能显著地减轻教师的工作量，帮助教师将教学全过程中的低效劳动部分降低到尽可能少的状态.

在实际教学中，教师工作最繁重的、也可以说是课业负担最重的主要是两个部分——备课和批改作业.这两个教学环节耗费着教师大量的时间和精力，然而对相当多的教师来讲，二者又是工作效率很低的环节.

教师辛勤工作，无私奉献，像蜡烛一样点亮了别人、燃尽了自己的精神，一直深受人们的敬仰，而这种精神经常是用每天在灯下认真备课到深夜来体现.然而，我们进行深入的调查研究发现，在常态教学条件下，许多教师的备课实际上只是在不断地重复着一代代教师做过的事情，走上一代教师走过的路，甚至是作为完成任务而应对的举措.有的年轻教师到学期一半的时候，常常撰写教案的速度已经跟不上教学推进的速度了，甚至连将教材或教学参考书上的内容抄一遍的时间都不够了.备课占用了教师大量的时间，但效率和质量却常常并不高.

批改作业则是教师工作中需要耗费大量时间和精力的又一个教学环节.批改作业是检查、反馈每个学生学习质量，并根据学生学习的水平进行有针对性的教学、辅导的重要的教学手段，教师应该认真对待.但在教学进入常态化的情况下，教师能够用于批改作业的时间是很有限的，常常是在课与课之间的空隙时间来完成，其压力不言而喻.有的教师的作业批改实际上已经演变成一种机械性的行为了.

所以，应用先进的信息技术一定要将教师在这两个环节上的工作量显著地减下来，同时又能保持较高的完成质量，这样教师自然就会乐于使用了.

第四是不可替代性，就是信息技术在学科教学、课堂教学应用中所显示的优势和效果，须是传统的教学手段、教学方法无法做到、不可替代的.

采用信息技术进行教学，尤其是在刚开始的阶段，一定要显示出成效远远高于传统的教学手段和教学方法，特别是传统的教学手段和教学方法无法达到的时候，教师自然会对应用信息技术产生浓厚的兴趣和强烈的使用欲.例如，在倒计时环境条件下进行练习和考试，作业通过移动终端进行推送，作业的计算机批改和质量分析，学生思维过程在计算机上的显示和评价，大规模的考试测评和大数据的分析、建模等，都只能通过信息技术的应用来实现，而当这些应用效果明显呈现出来时，教师会自然而然地使用，即使在刚开始时还要花一些时间和精力来学习使用方法，也会乐意学，乐意用.

当然，一下子要全部实现以上目标，难度是相当大的，但我们必须向这个方向努力，一步一个脚印地向前迈进.教育信息化的实现也必定是在这些目标实现

之后，而绝不可能在这之前.

为了实现上述目标，首要的任务就是必须要研制开发一大批可以在学科领域内常态化使用的教育软件，实际上也就是智慧教育软件.

那么，什么是智慧教育软件呢？以培养人的思维能力为目标，将优秀人才的思维过程用信息技术形象地在电脑上展示出来，并能进行师生互动，具有学生思维过程的显示和评价功能的软件系统，就称为智慧教育软件.

再进一步，智慧教育软件需要符合怎样的要求呢？我们认为，一门学科领域中成功的智慧教育软件需要符合以下几条标准：

1. 要有本学科能揭示思维过程的规律性的正确的科学思维方法体系作为基础理论.

教育信息化建设是一项系统工程，智慧教育软件的研制开发也是一项系统工程，所以首要的问题是要有顶层设计.这种顶层设计在科学的层面上，就是要将本学科能揭示思维过程的规律性的正确的科学思维方法作为基础理论，作为智慧教育软件的科学构架.有的学科内容也可能是一块一块组合起来的，这时需要的就是建立在科学分类基础上的体系作为基础.

一项信息技术成果或产品，如果没有正确的科学思维方法为指引，没有建立在科学体系基础上的顶层设计，仅仅是微观素材的堆积和列举，那么最终势必造成使用过程中的一系列问题，甚至是解决不了的问题.

2. 对本学科的90%以上的教学内容，要有思维过程的形象展示，也就是实现思维过程的可视化.

智慧教育软件要展示的核心内容是什么？最重要的不是解决问题的结果，而应是解决问题的思维过程.解题的结果，任何一本教科书、教学辅导资料、习题集上都有，如果信息技术仅仅是将这些纸质的素材电子化，那么使用信息技术的意义和价值又体现在何处？在传统教学中，思维过程通常都是被隐去的，或者常常是隐藏在教师的头脑中的.而信息技术最大的优势就是可以将这一思维过程用信息技术在电脑上形象地展示出来，这也就是思维过程的可视化(现在已被许多教师称为“思维过程的脑 CT”).让思维过程可视化，就使学生不但知道怎么解题，而且明白拿到一个问题以后，应怎样进行思考，怎样把解决办法想

出来，这样学生的思维能力，包括分析问题和解决问题的能力就会得到显著的提升.

3. 要有能基本满足整个学科教学阶段的教和学的要求的信息量.

一款智慧教育软件，假使它的功能非常强大，但信息量不大，在相应学科中能应用的课时只占总课时数的 20%，或甚至不到 10%，即大多数课时中不能应用，教师还是需要去搜寻和使用各种各样的教学参考资料，那怎么实现常态化的应用呢？同样，即使在平时的教学中可用，但到复习阶段，尤其是中考、高考的总复习阶段又不用了，那能体现真正的价值和效果吗？因此，任何一款成功的智慧教育软件，都必须要有相当大的信息量，能基本满足整个学科教学阶段的教和学的需要，能满足复习阶段的教和学的需要，令教师感到不需要再另外寻找或使用其他教学资料或素材来确保教学内容和教学质量.

4. 要有智能搜索功能.即要实现每一位教师在所执教的学校、班级，每一节确定具体教学要求和教学内容的课，能很方便地搜索到最具针对性的内容的要求.

在信息技术高度发达的今天，互联网上能提供的教育教学信息已经达到超级海量的程度，但教育并不能“大海捞针”.要使我们的教师、学生能很方便地获取所需要的、有针对性的内容，就必须建立智能搜索系统.

智能搜索，就是教师、学生只要按少量的按钮，选取少量的信息，就可以找到自己所需要的内容的功能.

5. 要能在台式电脑、笔记本电脑、平板电脑、智能手机等各种移动终端上实现教师、学生互动使用，并取得教和学的实效.

教育信息化的常态化应用有一个标志，就是在随机的环境条件下都能进行教学活动，不论是电脑专用教室还是普通教室，不论是台式电脑还是平板电脑，打开来就都能使用软件进行教和学.而这种教和学又可以实现教师和学生之间的互动，尤其是思维过程的互动，从而通过教学过程中最关键的问题的解决，取得教和学的实效，大面积提高教育教学质量.

现在我们正在积极地开展智慧教育软件的研制开发，《几何王》初中平面几何学习软件就是我们成功研制并正在推广应用的第一款智慧教育软件.

当我们能为各级各类学校提供一大批智慧教育软件,真正使我们的教师和学生能在各种移动终端上自如地使用智慧教育软件进行教和学,那么我们就可以用我们的实践和研究,给“乔布斯之问”作出最好的回答.

# 第二节　思维过程可视化

教育信息化的关键和难点是研究开发一大批智慧教育软件，研制智慧教育软件在技术层面上的创新和突破，就是思维过程的可视化.作为一种探索，我们首先研制开发了第一款智慧教育软件——《几何王》初中平面几何学习软件(网络版).

《几何王》初中平面几何学习软件(网络版)是在《几何王》初中平面几何学习软件(单机版)的基础上，根据现代教育信息技术发展的方向和要求而研制成功的、可在网络上直接运行和应用的智慧教育软件.

根据初中平面几何教学的实际需要，《几何王》初中平面几何学习软件(网络版)具有七个方面的功能模块：基本图形分析法、几何题典、一课一学、智能搜索、图形冲浪、节节高、中考助手.

## 一、“基本图形分析法”功能介绍

“基本图形分析法”是《几何王》初中平面几何学习软件的理论基础.

平面几何中的基本图形有30多个，可以分成“平行线”“等腰三角形”“与圆有关的角”“全等三角形”“相似三角形”“特殊角三角形”“与面积方法有关的三角形”等七个部分.

在“基本图形分析法”的功能页面上，出现了五个部分的内容：基本图形、图形性质、位置特征、应用条件和应用方法.

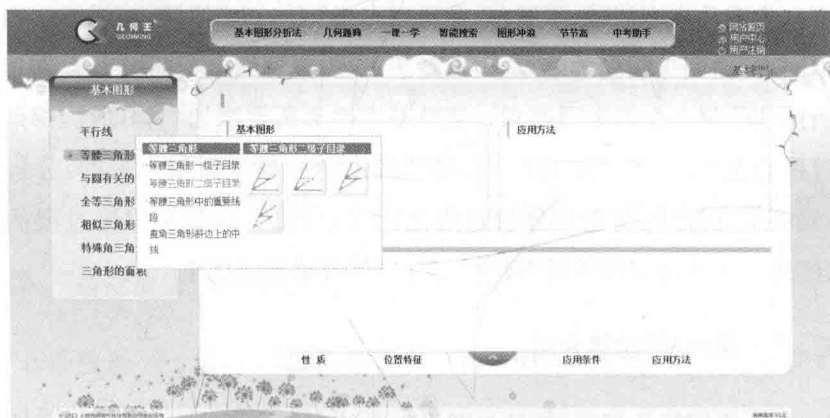
基本图形和图形性质，可以说是所有的几何教材上都涵盖的内容，一般来说，学生也都可以掌握，甚至记忆背诵出来，但仅仅将这些内容记忆背诵出来，离学好几何的目标显然还有很长的距离.关键的问题显然是在千变万化的习题中，怎么想到要应用哪个基本图形，怎么用证明方法，这两个问题要依靠位置特征、应用条件和应用方法来解决.




在一个具体的几何问题中，你怎么会想到要应用这个基本图形？对这个问题的回答就是应用条件，但应用条件怎么得到的呢？就是通过对图形的位置特征的研究得到的，而应用方法则是由基本图形决定的，基本图形的完整化就可得到应用方法尤其是添加辅助线的方法.

当对一个问题在“几何题典”页面上进行分析时，对于每一个基本图形的应用条件和应用方法，或者对某一个或某几个分析步骤感到不清楚或讲不出道理的时候，都可以随时切换到基本图形分析法的页面上，根据相应的基本图形所阐明的道理，看懂、明白分析的过程，并可领悟分析方法的规律性的应用过程.

在点击每一个基本图形的使用按钮时，会呈现应用这个基本图形的有关图标，这些图标可以分为两类：一类是实线图标，表示不需要添加辅助线的应用方法；一类是虚线图标，每一个这样的图标都是应用同一种添加辅助线的方法.



## 二、"几何题典"功能介绍

"几何题典"是《几何王》软件的最基本、最重要的核心功能."几何题典",顾名思义就是一部"几何词典",但它不仅是一部解题词典,更是一部分析词典.它不仅解决每一道题怎么做,更要解析每道题目是怎样一步一步想出来的思维过程,这是所有教材、教学参考书、习题集、解题词典上都找不到的内容.




《几何王》软件里的每一道题目的分析过程,都是在"几何题典"的页面上来展示的.

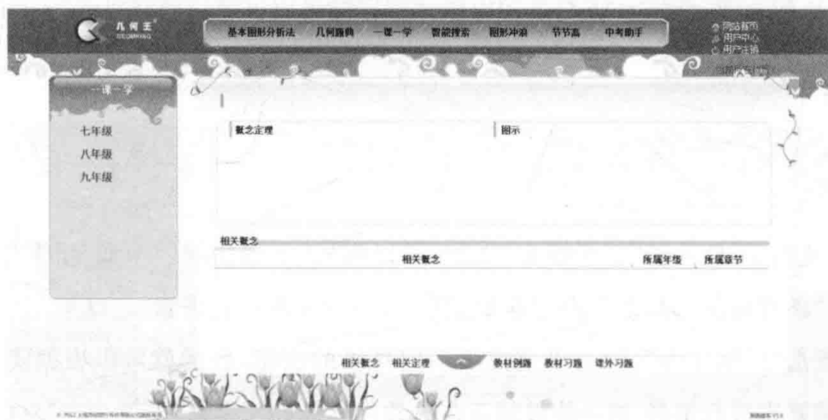
在题目呈现后,只要点击"分析"按钮,分析过程就会开始展示,以后只要点击"下一步"按钮,分析过程就会一步一步依次展示下去.在教学中,教师在任何一步都可以停下来,询问学生"接下来应怎样想",努力使学生自己想出来.如果学生有一步或几步不清楚、不明白,还可以点击"上一步"按钮,将思维过程一步一步退回去,退到想明白的地方,再重新想下去,直到问题全部想出来.在思考过程中所用到的每一个基本图形和补完整基本图形所要添加的辅助线,都是随着分析过程的进行,一步步呈现出来,辅助线也是一条条添加出来的,分析到哪里,添到哪里,图形的变化和分析过程是同步进行的,这就是思维过程的可视化,这样每一个几何问题的思维过程就可以呈现得清清楚楚.

## 三、"一课一学"功能介绍

"一课一学"是《几何王》软件与课堂教学结合得最紧密的功能,可以实现方

便教师、学生在备课、课堂教学、课后复习、作业中使用的目标.

展示页面后，直接点击相应年级，就可依次进入所需要的章、节、小节.选择所需要的内容进行点击，就可以显现“相关概念”“相关定理”“教材例题”“教材习题”和“课外习题”等内容.

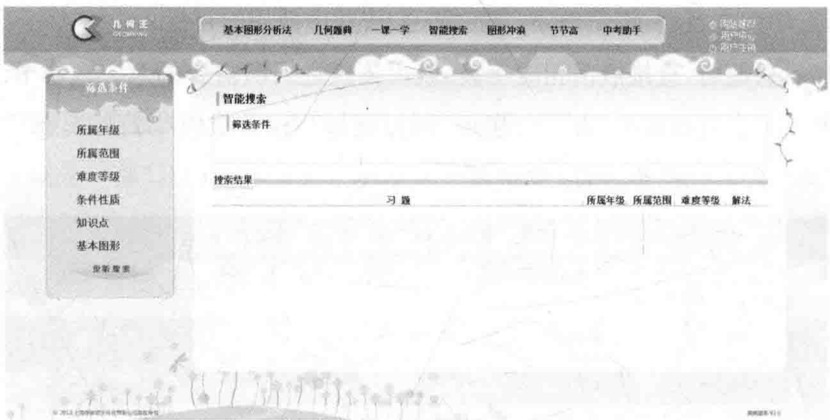



点击“相关概念”，展示的就是这一节教材中的知识概念内容，教师可直接进行教学.点击“相关定理”，展示的就是这一节教材中的有关定理的内容，对定理本身的分析、证明则安排在“教材例题”中.点击“教材例题”，展示的就是这一节教材中的有关例题，并且都有详尽的分析过程，便于教师在教学过程中参考.点击“教材习题”，展示的就是这一节教材中的有关练习题，既可以作为课堂练习，也可以作为课外作业布置.点击“课外习题”，展示的就是与这一节教材内容有关的课外练习题，这是教师应用最多的部分.实际上，不管教师使用哪一版本的教材，仅仅依靠教材上的内容进行教学是远远不够的，还需要补充相当数量的习题，尤其是在复习课上，“课外习题”就是为了教师的这一需要而编撰的.

“一课一学”上的内容，教师选定以后，可直接撰写成教案或打印成文.

## 四、“智能搜索”功能介绍

“智能搜索”是《几何王》软件最重要也是最强大的功能，它可以帮助教师迅速搜寻到自己所需要的教学内容.




《几何王》软件的“智能搜索”功能，可以根据“所属年级”“所属范围”“难度等级”“条件性质”“知识点”和“基本图形”等不同要求进行搜索.

点击“所属年级”，就会出现拖出不同年级的按钮，教师就可以根据实际的教学需要来进行选择.如一位教师正在执教八年级第二学期，那就点击“八(2)”，那么八年级第二学期的全部内容就会呈现出来，直接点击要看的题目，这道题目就会直接跳转到“几何题典”页面上展开.

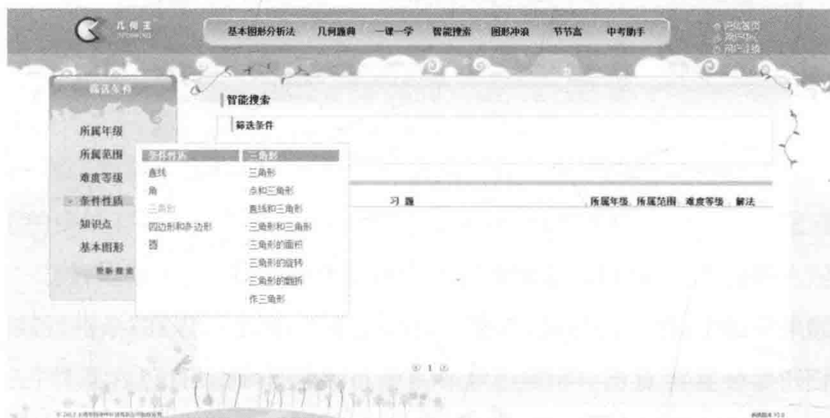



点击“所属范围”，就会出现“教材例题”“教材习题”“课外习题”“中考真题”“竞赛试题”等选项，教师、学生都可以根据自己教和学的需要来作出选择，一般教师选得较多的是“课外习题”和“中考真题”两部分.

如点击“难度等级”，就会出现以星级来表示的不同难度等级，以便于教师根据所教班级学生的实际水平作出选择，也便于学生根据自己的实际能力水平

作出选择.学生刚开始学习时,或能力水平还较低时,可选择★级或★★级的内容进行教和学,随着学习水平和学习能力的逐步提高,可转到★★★级甚至★★★★级的内容进行学习.在高星级内容已能很好地掌握的情况下,低星级的内容也就可以不再重复学习.

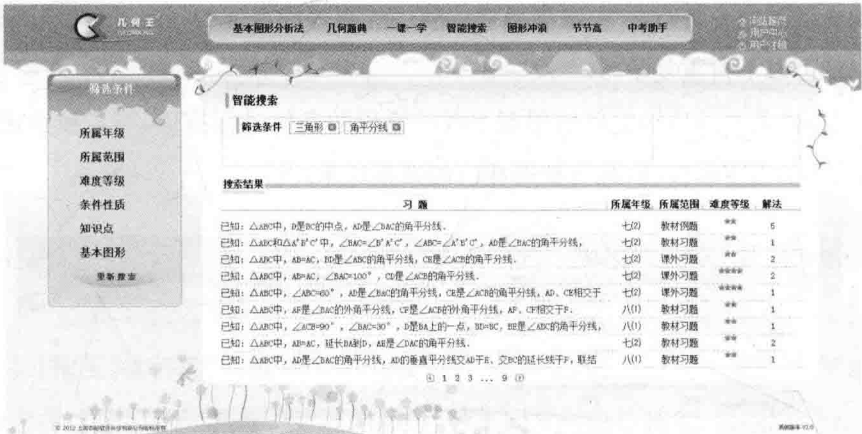
点击“条件性质”,则可以根据习题所给出的条件进行搜索,可直接点击“条件性质”中相应的模板,就可获得相应的搜索结果.




如果题目给出的第一个条件是“$\triangle ABC$ 中”,那么只要点击“条件性质”中的“三角形”,就会搜索到包含条件“$\triangle ABC$ 中”的所有题目.



如果第二个条件是"$AD$ 是$\angle BAC$ 的角平分线",那么就在角的部分点击"角平分线",所有三角形中给出角平分线的题目就会显示出来.




依次进行下去,就可以很快地搜索出所需要的题目.

如果题目中首先给出的是等腰三角形的条件,那么可以在"条件性质"中的"三角形"部分直接点击"等腰三角形",就可以搜索到所有包含条件"$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$"的题目.




如点击"知识点",则可以搜索应用到这个知识点的所有的题目.

如果在“知识点”中点击“三角形的中线”，那么搜索的结果将会显示所有与三角形的中线有关联的题目.这一功能在复习课，特别是围绕某一个主题或专题进行复习时，用得比较多.

如果点击“基本图形”，那么可在拉出图标后，直接点击图标来进行搜索.每点击一个图标，就可以搜索到应用这个基本图形的所有题目.如果点击的是实线图标，那就是不需要添加辅助线的应用这个基本图形的所有题目；如果点击的是一个有虚线的图标，那就是需要添加辅助线的应用这个基本图形的所有题目，而且每一个有虚线的图标，都可以搜索到应用同一种添线方法的所有题目.

如果点击“等腰三角形中的重要线段”这个基本图形的第六个图标，这是一个有虚线的图标，表示出现了角平分线和向角平分线所作的垂线就一定会出现

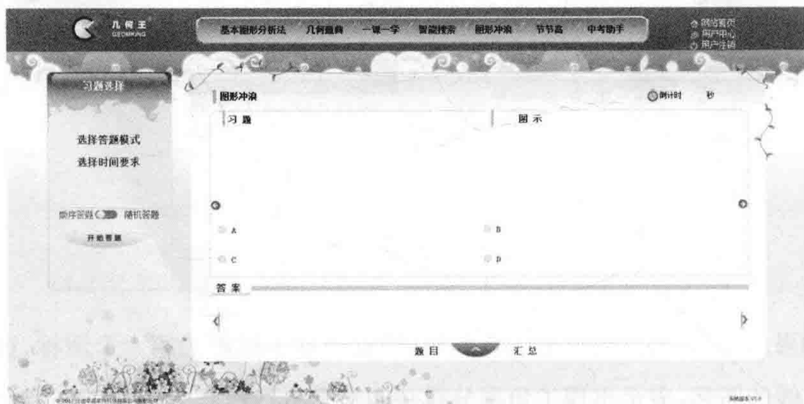
等腰三角形中的重要线段的基本图形.添加的方法是将角平分线的垂线延长到和角的两边相交,那么搜索得到的就是应用这种添线方法的所有题目.在教学中,要集中进行某一种应用方法、添线方法的学习,并要强化应用时,就可以用这种方法来进行搜索.




## 五、"图形冲浪"功能介绍

"图形冲浪"功能的设计,目的是为了对学生进行看图训练,提高学生的看图能力.

在几何问题中,有100多个最基础、最重要、出现频率最高的图形,这些图形看懂以后,就几乎没有看不懂的图形了,所以就可将这些图形集中在一起,进行集中的看图训练.



为了强化训练，加大紧张程度，逐步增加训练的难度和要求，在“图形冲浪”部分还专门设计了倒计时功能，让学生在倒计时的环境条件下进行思考和答题，目的是在提高学生看图能力的同时，培养学生思维的敏捷性、判断能力，进行要求很高的心理素质训练.

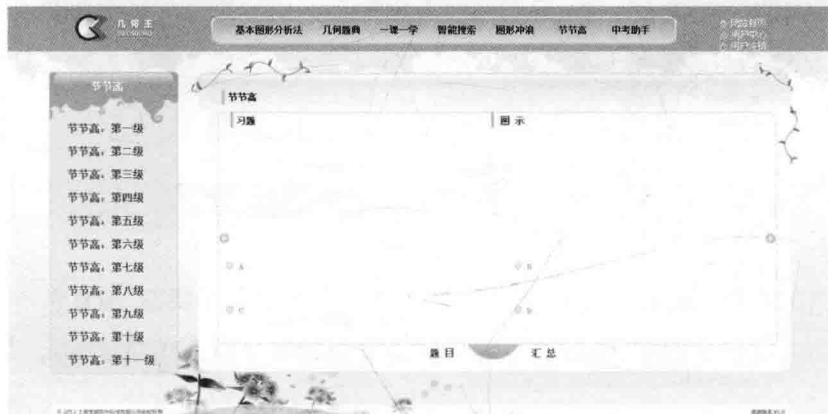
展示页面后，在“选择答题模式”部分，如选择“题号”，就可以根据题目的次序依次来进行训练；如选择“基本图形”，则每次都以这个基本图形为主题来进行训练.然后再在“选择时间要求”选定若干秒，那么每道题目的答题都在选定的若干秒开始进行倒计时，到时就会自动跳转到下一题.接下来还要在“顺序答题”和“随机答题”中作出选择(设计“随机答题”功能，主要是为了避免连续进行的按固定顺序的看图训练出现思维定式)，然后点击“开始答题”，就可开始进行练习.每次练习完成后，只要点击“汇总”，就可看到这一次练习的结果、分析和成绩.

### 六、“节节高”功能介绍

“节节高”是为了使学生能及时了解自己的学习水平，在自己目前的基础上进行有针对性的学习，一步一步提高、发展自己的学习能力而设计的功能.

“节节高”页面打开后，可点击其中的任何一级开始练习，如果通过，就可做高一级的练习；如果没有通过，系统会给出应做的相应练习题，进行学习上的指导，从而帮助学生取得学习上的逐步提高和进步.

“节节高”内容共分为十一节，可逐级提高，供学生根据自己的实际情况选用.

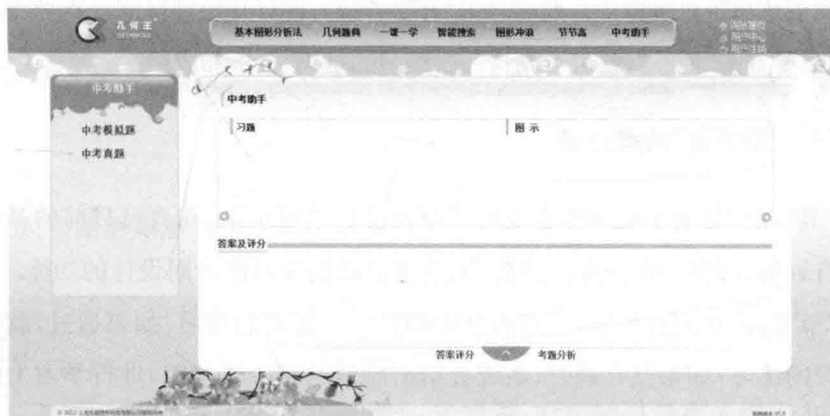


## 七、“中考助手”功能介绍

“中考助手”是为了适应各地、各学校在总复习阶段的教学需要而设计的功能，这也是许多教师使用频率较高的功能.

“中考助手”功能页面打开后，有“中考模拟题”和“中考真题”两部分可供选择，点击后就可展示相应的内容或进行练习、测试.

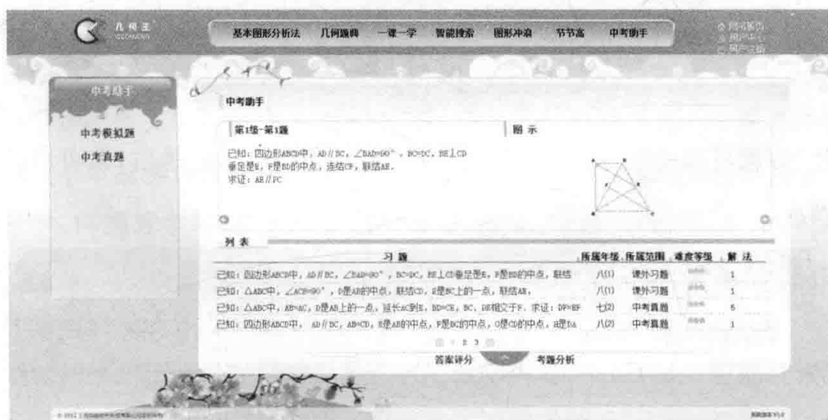
“中考模拟题”中，总共给出了 10 套具有中考综合性要求的模拟试题，每套 10 题，都覆盖了几何教学要求在分析方法方面的主要内容.在实际教学中，教师只需要有针对性地选择几套或进行重新组卷后进行练习就可以了.






因为每一套中考模拟题都是要求学生进行练习的，所以教师可直接打印成试卷或进行重新组合后再打印成试卷供学生训练，所以软件上在每一试题显示以后，是打不开答案部分的，只有当10道试题全部做完才展示答案，并附有每一题的得分标准.在“中考助手”功能页面上，是看不到每一道题目的分析过程的，如果要查看每一道试题的分析过程，可直接点击在页面上列出的试题，跳转到“几何题典”页面，就可以浏览分析过程.




“中考真题”选编了部分地区近年来中考试卷中的几何试题，根据软件的设计要求，每道试题都展示了详细的分析过程和解题过程，可根据需要点击后阅读观看.

# 第三节　应用《几何王》软件进行备课和课堂教学

在备课和课堂教学中应用《几何王》软件，首先要进行登录.

在国家教育资源公共服务平台(n.eduyun.cn)或点击《几何王》软件系统网址(www.001jihe.com)都可以打开、进入《几何王》初中平面几何学习软件(网络版)的主页.




然后，就可以用账号、密码进行注册、登录.用户成功登录后，就可以进入浏览页面.



在主页面的上方，这时就出现了“基本图形分析法”“几何题典”“一课一学”“智能搜索”“图形冲浪”“节节高”和“中考助手”七个功能模块按钮.

使用《几何王》软件，首先要学会操作.对许多教师来说，学会软件的操作是不难的，甚至一两个半天就能学会.在学会操作软件以后，就需要通过自己的不断使用，逐步达到娴熟操作的程度，这样就能在备课和课堂教学中从容自如地使用软件.

教师使用《几何王》软件进行教学的基础和前提是备课，只有备好课，撰写了质量较高的教案，才能娴熟地使用《几何王》软件进行上课，并取得较好的教学效果.

使用《几何王》软件进行备课，就是将现代信息技术应用到备课工作中，其总的原则、要求和常规的备课要求应该是一致的，但应体现出方便、规范、高效的特点.

应用《几何王》软件进行备课的关键和重点是要使学生在学习和掌握基础知识、基本技能的基础上，学会并能应用正确的思维方法来思考问题，培养学生的思维能力、分析问题和解决问题的能力，并进而实现提高几何教学质量的目标.

备课第一步要做的就是根据课题、教学目的和教学要求，对整节课的框架结构进行筹划.根据多年来实验学校积累的教学经验和研究成果，应用《几何王》软件进行教学已逐渐形成了教学效果比较好的教学模式.

一节课的整体时间安排，一般情况下，复习和新知识引入占 3 至 5 分钟，看图训练或基本技能训练占 3 至 5 分钟，新课教学或复习课教学(包括概念教学、定理教学、例题教学等，教学形式包括讲授、提问、阅读、讨论等，教学容量根据具体教学班的实际情况大体上确定在 3 至 5 个例题)占 20 至 25 分钟，学生课堂练习和教师巡视辅导占 8 至 10 分钟，课堂小结占 2 至 3 分钟.

备课的第二步就是根据教学要求选定教学内容，可以使用“智能搜索”功能搜寻所需要的内容，也可以通过“一课一学”或“中考助手”选定所需要的内容.选定教学内容的基本原则是要适应多数学生的学习水平和学习能力，是多数学生需要通过自己的努力学会、学好、掌握的内容.

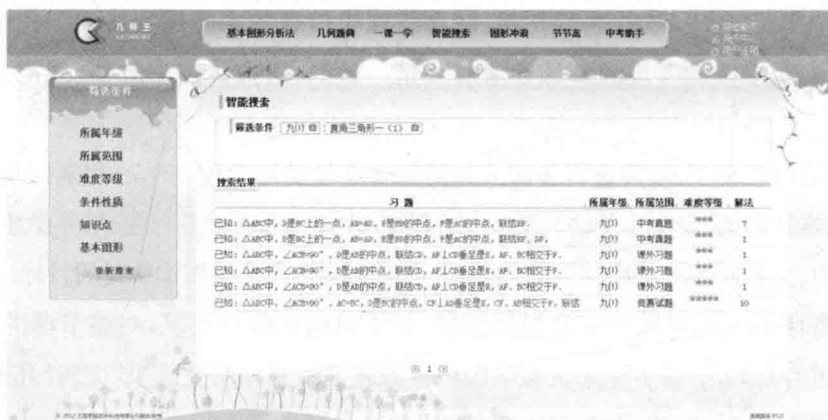
对每节课的例题和练习题的选择和确定，要考虑到难度等级的逐步提升.根据教学班的实际情况，可以选择★级、★★级、★★★级的配置，也可以选择★

★级、★★★级、★★★★★级的配置,还可以选择★★级、★★级、★★★级的配置等,难度等级的确定要坚持从实际出发、追求实效的原则,学生达不到要求时应适当调低难度要求,确保教学的实际效果.

以备“直角三角形斜边上的中线的性质的应用”一课为例.

首先,可以在“基本图形分析法”部分,点击“直角三角形斜边上的中线”的基本图形,可以选用基本图形的性质、位置特征、应用条件和应用方法作为概念部分的复习.

然后,在“图形冲浪”的“直角三角形斜边上的中线”部分选定五题,设定每题练习的倒计时间为30秒,作为看图训练.




接下来,应用“智能搜索”选取教学用的例题,第一题可以按“直角三角形斜边上的中线”的实线图标选难度为★★级的题目.



第二题可以按“直角三角形斜边上的中线”的第一个虚线图标选难度为★★级的题目，对于学习基础较好的班级也可再选一题.

接下来可以按“直角三角形斜边上的中线”的第二个虚线图标选难度为★★级或★★★级的题目，对于学习基础较好的班级也可各选一题.

最后，可在以上适当的部分选择一个题目作为课堂练习，并在这三个部分各选一题作为课外作业题.

在完成了教学内容的选定以后，就进入了备课的第三步，就是认真钻研和深入推敲思维的过程.这是最重要、最关键的部分，教师备课质量的高低，说到底就是由这一部分内容质量的高低来决定的.教师要正确地解决“拿到这个问题后是怎样想的”“是怎样一步一步想出来的”“为什么会这样想”这三个问题.

《几何王》软件给出了每一个问题详尽的分析过程，教师在备课时可以作为参考.重要的是，每位教师在明白、掌握了这些分析过程以后，要用自己的教学语言来进行表述和讲解，有的还要进行解释和说明，这一转化过程是要在备课阶段解决的.

对每一个问题的分析过程，教师也可以采用自己习惯的教学语言来进行教学.在备课时，教师应该在教案中将所要讲述的分析过程完整地写出来，对于每一个关键的步骤，都给自己提出设问：“为什么会这样想？讲清楚了没有？”“怎么会想到这一步？讲清楚了没有？”这样就会不断地提高自己的备课质量和教学能力.

确保对分析过程研究透彻，思维过程的道理都能讲通以后，就可以进入备课的第四步，筹划课堂教学的教学形式和教学方法.

任何教学内容，在具体执教时，都可以采用不同的教学方法或教学形式来进行.教学的方法，有以教师讲授为基本形式的讲授法；有教师提问、学生进行思考回答的问答法；有教师和学生、学生和学生之间进行讨论的讨论法；有以对学生进行基本训练为主要内容的练习法；有学生阅读后提出问题、教师进行解答论述的阅读指导法，等等.

教师需要根据实际的需要和教学内容的特点，选择恰当的教学形式和教学方法.例如，有的概念，概念中出现的关键词，概念的语言表述和符号、字母表述

的互译,反例的构建等,学生很难通过自己阅读就能理解,更无法自主提出问题,需要教师讲得深入浅出,帮助学生很快明白、理解、掌握,就可以采用讲授法;有的内容属于技能学习和训练的范畴,学生既可以在教师示范后练习,也可以在自己阅读的基础上进行练习,这时就可采用练习法或阅读指导法;有的内容很容易组织成问题,逻辑性比较强,一步步的推理很清晰,而且可以激发学生的积极思维,这时就可以采用问答法;有的内容,学生有一定的兴趣,也有一定的知识积累,容易产生好奇心和求知欲,易于自然而然地萌发设问,学生之间也容易讨论起来,这时就可以采用讨论法.

教师采用什么教学方法进行教学不是以一节课为单位的,即采用某种教学方法,并不意味着这节课必须从开始到结束都只能用一种教学方法,而应该根据实际的需要、期望的教学效果进行选择,可以一节课只采用一种方法进行教学,也可以在一节课的不同阶段采用不同的方法进行教学.

教师采用什么教学方法进行教学,最重要的目的就是教学效果,即教学的实效.任何一种教学形式、教学方法,都要在常态化应用的要求上得到检验.教学是需要形式和方法的,但绝不是追求形式的.一种教学方法或教学形式的评价再高,最终都不仅仅是看在研究课、公开课、展示课上的效果怎么样,而是要看常态化的课,没有其他教师来听的课,教师自主发挥的课上是否得到应用,是否上出实效.

在确定了在这节课上所采用的某一种或某几种教学方法以后,就进入备课的第五步——设计教学过程.

由于通过前几步的工作,教学过程的整体框架实际上已经构建,因此这时最需要完成的就是将每一个问题的分析、思维过程转化为教学过程.如实施问答法进行教学,就要设计出一个一个的具体问题和学生可能作出的回答,这时还要对学生有可能出现的错误回答作出预先的估计和相应的评价、指导.如实施讨论法进行教学,就要设计课堂教学进行到什么时候,围绕什么主题来组织学生进行讨论,要思考如何激发学生对这个主题的兴趣和求知欲,这时需要估计在讨论过程中,学生可能产生的共性的问题是什么,同样需要思考应对的举措,还要考虑如果学生讨论不起来应怎样进行引导.如实施阅读指导法进行教学,就要

预设课堂教学进行到什么时候可以进入阅读的阶段，这时同样需要思考学生在阅读、看书过程中容易出现的问题是什么，哪一个关键问题是学生在阅读过程中容易忽略的，对此应怎样进行指导以期取得较好的教学效果.

无论采用哪种教学方法，追问都是必不可少的教学手段.对学生已经作出的回答，追问“你是怎么想到的”“为什么”“有没有其他的可能性”“作出这次选择你是怎样考虑的”是培养学生思维能力的有效形式，有利于引导、促使学生的思维活动向更高的层次发展、升华.所以教师在备课中，一定要设计好“追问”.

由于应用《几何王》软件进行教学还会涉及硬件条件，因此教学过程的设计一定要建立在确定的硬件环境条件下.目前应用《几何王》软件进行教学可以有三种教学形式：普通教室上课、电脑教室上课和学生采用移动终端设备上课.显然，对不同的教学形式，教学过程的设计也是不一样的.

在普通教室上课的主要形式是教师在投影屏幕或智能白板上演示，教师、学生在思维活动层面上互动，学生无法自己进行操作，软件部分功能的使用也受到限制，但目前大多数学校、班级的条件决定了只能采用这种形式.这时教学过程的设计主要围绕如何演示配置于普通教室常规条件下的教学活动设计.在电脑教室上课，学生可以自己在电脑上进行软件的操作，教师可以有针对性地进行指导，软件所设计的功能都可以应用于教学，并实现部分师生互动，教学效果和教学质量可得到及时的显示和反馈.但由于一般学校的电脑教室数量有限，难以实现多个班级同时上课，这时教学过程的设计就会更着重于学生在电脑上通过自己动手操作来进行学习.学生采用移动终端（平板电脑、智能手机）进行教学，教师可以推送学习要求和学习内容，学生可以在移动终端上完成以做习题为主的学习任务，学生可以将自己的练习结果推送给教师，电脑自动完成练习题的批改，显示学生的答题情况、思维过程和相应的评价、分析、指导.这时的教学设计主要围绕知识获取、技能训练和思维能力培养这三个层面的评价和指导展开.显然，这三种教学形式对于备课和教学过程相应地会有不同的要求.

当以上步骤全部完成以后，就进入了撰写教案环节，也就是备课的最后一步.

教师的备课成果，最终都是以教案来呈现的，备课质量的高低最终也是以

物化的形式——教案质量的高低来衡量的.

在高质量备课的基础上撰写高质量教案,实际上只有一个要求——规范,也就是教师应用规范化的语言(包括规范化的要求和规范化的形式)来撰写教案.

应用《几何王》软件撰写教案,可在Word文档中完成.在“智能搜索”功能中搜索到需要的题目以后,就可以双击左键后将题目以及分析过程、解题结果在“几何题典”主页面打开,然后可将需要的内容直接复制到教案中,有关的图形也可以应用“截图”功能直接复制到教案中,对分析过程既可以根据实际情况进行必要的充实或调整,也可以根据教学的实际情况组织成系列问题和互动的过程,直至完成教案的撰写.应用《几何王》软件进行备课、撰写教案等所有要求都可以通过“点击”来完成,目的就是要使教师的使用方便而高效.

在完成了备课以后,就进入了教案的实施阶段,也就是应用《几何王》软件进行课堂教学.

教师在完成了高质量的备课并撰写了高质量的教案的前提下,课堂教学实际上就是对备课成果的实施,即按照教案的设计、安排,一步步地实施即可.

应用《几何王》软件进行课堂教学,教师可以在投影设备、智能白板、电脑、一体机上直接应用“智能搜索”搜寻需要的内容,点击打开后就可以进行教学,并可达到得心应手的程度.

在实施教案的课堂教学中,需要强调以下几点.

一是规范,课堂教学仍然要强调规范化的教学.这里的规范化,主要是指三个方面——语言规范、书写规范、思维规范.

在课堂教学中,教师要使用规范化的语言进行教学,这对数学教师来讲尤为重要.只有教师的语言是规范的,学生的语言才有可能是规范的.做到语言规范,需要有一个基础条件,就是要认识和掌握分析方法、推理方法、思维过程的规律性.学生掌握规律性以后,就会发现许多表现形式并不相同的问题,其分析方法和思维过程却是完全一样的,这样语言的规范也就自然而然地形成了.如果没有规律性的指引,认识只是停留在经验层面上,许多问题本身就讲不清楚,那么要用规范化的语言来表述就很困难了.

在平面几何的教学中，有相当多的内容都有严格的逻辑结构，采用的也是严格的逻辑推理方法，用规范化的语言进行教学是完全做得到的.然而，还是有不少教师尚不能完全做到用规范化的语言进行教学.

如“出现了三角形的中线，通常可以将中线延长一倍”这句话中，就无法讲清楚这个“通常”的准确涵义；“可以将要证明相等的两条线段放在两个三角形中，然后证明这两个三角形全等”这句话，就没有讲清楚为什么有的题目中就不是将两条线段放到两个三角形中，然后证明这两个三角形全等；“可以将要证明成比例的四条线段放在两个三角形中，然后证明这两个三角形相似”这句话，也没有讲清楚为什么有的四条成比例线段两两组成的三角形，又恰恰是不相似的；“这两个相似三角形是 A 字型相似三角形”“这两个相似三角形是 X 型相似三角形”，也都没有准确地讲清楚什么是 A 字型相似三角形，什么是 X 型相似三角形.所以，以上这种种语言表述都是不规范的.

在课堂教学中还有一个较普遍的问题，就是教师使用了很多随意性的语言.有的教师突然想到什么会即兴发挥，脱口而出，由于没有经历仔细推敲的过程，所以表述的语言常常也是不够规范的.

《几何王》软件是以能揭示几何问题分析方法的规律性的基本图形分析法为基础理论的，所以软件所介绍的分析方法和分析过程中使用了许多规范性的语言，很多不同题目的分析过程在应用到相同的基本图形时，分析方法的阐述、使用的语言都是一致的，不会随题目的不同而变化，这就是规范化的语言表述.

在语言规范的基础上，还应要求书写规范，即文字(包括字母)、符号表述规范.在平面几何教学的全过程中，无论哪部分内容，只要书写表达出来，都可以达到规范的要求，无论是全等三角形还是相似三角形，也无论是直角三角形还是等腰三角形，都有一套具有模式的规范化书写要求和程序，对教师来说，一定要做到只要拿起笔，写出来的就一定是规范表达的结果.

对学生来说，书写表达的规范化训练应在学习的起始阶段严格要求，认真训练，形成规范，这是在八年级第一学期以前的教学中要着重落实、抓好的一个方面.在开始培养书写规范时，由于要下一点功夫，花一点时间，有的学生会感到麻烦表现出不情愿、不配合，这时就需要教师耐心地讲清道理，循循善诱，鼓励

学生持之以恒，逐步养成书写规范的良好习惯.

在学生的作业中或考试的答卷中，我们经常可以看到许多涂涂改改的痕迹，这也是书写不规范造成的结果.而学生的书写规范一旦形成，这种现象就会显著降低.

规范的最高层次就是思维规范，这也是思维能力水平的一种表现.在语言规范和书写规范逐渐形成的基础上，就要上升到思维规范的层面上.

思维规范，是指教师、学生能用规范的思维方法、思维模式去思考和解决问题，是指在读题以后，能迅速作出判断，使自己的思维在正确的方向、轨道上进行，直至问题最终成功解决.当然，思维规范的形成有一个过程，但是首先必须要有这样一种意识，教师对自己要有这样一种要求.有意识和没有意识，有要求和没有要求，教师的教学行为是不一样的，教学效果当然也是不一样的.

人的思维活动常常是以探索和尝试开始的，但这种思维的探索和尝试有两种模式，一种是毫无目的的尝试，形象地讲就是“东一枪、西一枪”地乱试，能否成功心里也没数；另一种就是先对正确的方向进行判定，然后在确定的某几个成功率明显较高的正确方向上进行尝试，能否成功心里有一定的把握.思维规范实际上就是要求按第二种模式进行思维.

二是思维过程教学的落实.在课堂教学中，思维过程的教学也是一个循序渐进的过程，重在教师的示范和对学生的培养、熏陶.这一过程包括“思维过程的示范”“思维过程的模仿”“思维过程的掌握”“思维过程的领悟”等几个阶段.

思维过程的示范是指教师用规范的语言准确地表述思维的过程.教学都是从教师的示范开始的，平面几何教学中的许多规矩的教学也是从教师的示范开始的，所以思维过程的教学也同样是这样.思维过程的示范必须是教师讲解自己拿到这个问题后是怎样想的，绝不是将教学参考书上的解题结果拿来讲一讲，不能出现“只讲怎么做，而不讲怎样想”的语言，也不能出现不能讲清楚道理的结论，等等.

思维过程的模仿是指学生在明白了思维过程所具有的重要性，产生了重视思维过程的意识的基础上，模仿教师已经示范的思维过程来思考解决问题的行为.

从学生的学习来说，学习的第一步就是模仿，模仿教师的语言、思路，所以思维过程的学习也必然有一个模仿的阶段.教学中的模仿都是从微观上的一句句话开始，逐步上升到一个个思维环节，再发展到一个个思维结构.学生是在经过一段时间的模仿以后，逐步转轨到自己独立地去进行思维活动的.

思维过程的掌握是指学生在经过一定数量的模仿以后，能自主地对新的问题进行思考，并能正确地想出解决问题的方法和对不同的问题进行有针对性的应用.思维过程的掌握标志着学生的思维能力开始形成并逐步得到提高.

思维过程的领悟是指学生在经过一段时间独立解决问题的训练以后，对思维方法和几何问题分析方法的规律性的理解、掌握和领悟.这也是学生思维能力发展过程中的飞跃，同时也标志着学生的思维能力已经发展到了比较高级的水平.

如果说，在八年级第一学期以前，对学生的思维能力的培养还是处于一种熏陶状态的话，那么在八年级第二学期以后，就应将教学的重点转向思维方法、思维过程和思维能力的形成和培养上.

三是正确把握一节课的课堂教学效果与教学全过程的效果的关系.课堂教学是要重视效果的，然而，教师一定会面对微观的课堂教学效果和宏观的教学过程所取得的效果之间的关系的问题.

有的教师，从微观上看，每一节具体的课的教学效果看上去还是不错的，但教学过程全部结束后展现的效果却并不令人满意；也有的教师，有部分课的课堂教学效果并不理想，但整个教学过程完成后却可以取得很好的效果.从根本上讲，教师追求的应该是整个教学过程完成后取得的教学效果，这种效果应建立在绝大多数的课都取得较好的教学效果的基础上，但不一定是全部.宏观的教学全过程所取得的教学效果也不是所有的课堂教学效果的简单叠加，每一位教师都应首先管控整体的教学效果，这是最重要的.在这个前提下，再尽可能地使每节课也都能取得较好的效果.

概念、知识的教学，尤其是一些比较简单的概念和知识的教学，通过让学生记住、默写、复述等方式，是可以第一节课中取得效果的.但对于一些较复杂的、不易理解的概念、知识，学生理解、掌握和正确地应用需要一定的时间，一定要

追求当堂课的直接效果是很困难的.

技能的教学,学生学会一种技能在一节课上是有可能做到的,通过教师的讲解、示范和自身学习、模仿,是可以掌握的,效果也是可以展现的,但熟练程度的提高直至娴熟地掌握就需要经历一个过程.就一节具体的课而言,要取得这样的效果也是很困难的.

能力的培养,更不是一节课上能够养成的,每一节课所承担起的任务就是在培养学生思维能力的过程中,为实现这个目标而添砖加瓦,一步步地经历一个积聚的过程,这时就很难在某一节课中直接取得明显的教学效果.

所以,对每一节课的教学,哪些效果是这节课本身要追求和实现的,哪些效果是要追求但却是起着积聚作用的,教师要做到心中有数.

《几何王》软件设计了“图形冲浪”功能,主要目的是培养学生的直觉思维能力,重在看图能力.在课堂教学中,每节课只需练习 3 至 5 分钟,设定倒计时的时间可从 60 秒开始逐步减少,练习的题目根据教学内容可随机选取.“图形冲浪”不刻意强调一节课的直接效果,而是追求一个阶段整体上的教学效果.具体体现在看图、思维的敏捷性和判断能力,同时伴随着设定时间的越来越短,学生也在进行很强的心理素质训练,最终达到拿到几何图形“一看就明白,一想就出来”的境界.

四是正确评价学生作出的回答或解题结果.

课堂教学的效果常常会以学生的回答或解题结果的正确与否来体现.教师在课堂教学中希望学生的回答都是正确的,这样一种心理应该说是可以理解的.然而,学生面对教师的提问,一下子答不上来或者回答错误,恰恰是教学过程中的一种很自然的现象.

假如一节课上学生的回答自始至终都是正确的、甚至都是集体性的对答如流,那至少说明这节课教学目标的定位是有欠缺的.实际上,教师对每一节课所选定内容在难度的把握上都应该遵循一条原则,就是对多数学生来说需要经过一定的努力才可以完成学习任务.如果学生什么问题也没有,什么困难也不发生,不需要经过努力就能达成目标,那么这样的教学定位显然是过低了.教学就是要不断地针对学生在学习过程中出现的困难、问题、错误,进行有实效的讲

解、示范和引导，给学生的发展指出正确的方向.从这个意义上讲，在课堂教学中，教师要善于抓住学生的困难、错误，尤其是具有共性的困难、错误，帮助和指导学生克服、纠正.

对于学生在课堂中发生的错误，教师当然有责任及时发现、指出、纠正，但是要将学生发生的错误全部一一进行分析、讲评、指正，限于教学时间、环境等因素，实际上很难实现.这里同样有一个教师需要把握的问题：对于重要的、具有共性的错误和问题，当然要抓得住，要肯花时间进行讲评和指引；对于只是个别学生出现的、不影响多数学生学习的错误，可以用课后个别指导的方式进行辅导；还有的错误，即使是具有共性的，也可以在指出错误的前提下，要求学生课外继续研究或讨论，给他们的思考留下空间，也可以指导他们去查阅相关参考资料或借助智慧教育软件来化解.

平面几何教学的课时数相当多，不同的学校，不同的班级在一两节课上呈现不出多少差别，但经过数百节课的教学积累，就可能会呈现完全不同的教学效果.正是在这个意义上，我们要重视每一节课的课堂教学，要保证每一节课都有较高的质量，同时心中又要牢牢抓住整个教学过程在宏观层面上所追求的目标，将每一节的教学目标不断地向宏观目标推近，朝着教学的成功和辉煌迈进.

# 第四节　应用《几何王》软件的教案实例

## 《几何王》软件常态化教学教案一

课题：相似三角形的复习——逆平行线型相似三角形的应用

（九年级第二学期）

**教学目标**

1. 通过基本图形分析法的复习，熟练掌握由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形的基本图形的性质、位置特征、应用条件和应用方法，并能用于解决具体问题.

2. 通过基本图形分析法的复习，进一步体验每一步思维过程都是有据可循的，平面几何学习也是有规律的，增强学习的自信心.

3. 在自我学习和人机互动过程中，增强几何学习的兴趣，激发求知欲和学习积极性.

**教学重点**

掌握由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形的应用的分析方法.

**教学难点**

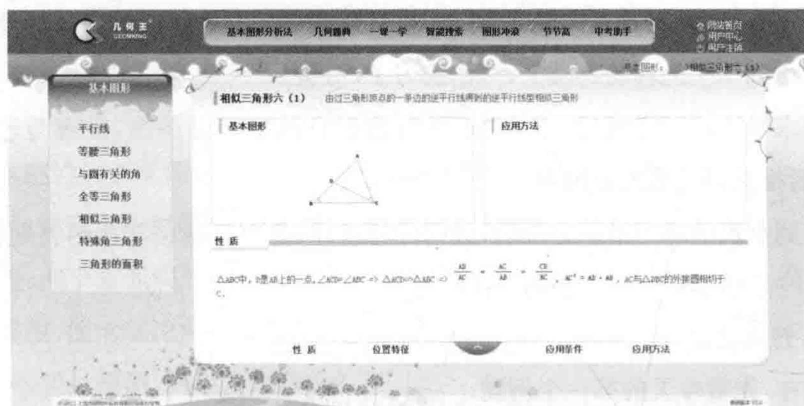
掌握在什么情况下想到应用由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形的性质来进行证明，理解相乘两线段重叠在一直线上和出现一条线段的平方对于应用由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形的性质的重要性，并学会相应的添线方法.

## 教学过程

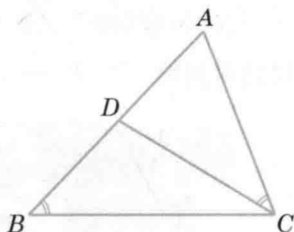
1. 课题引入和基本图形性质的复习

今天,我们要复习由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形的性质.

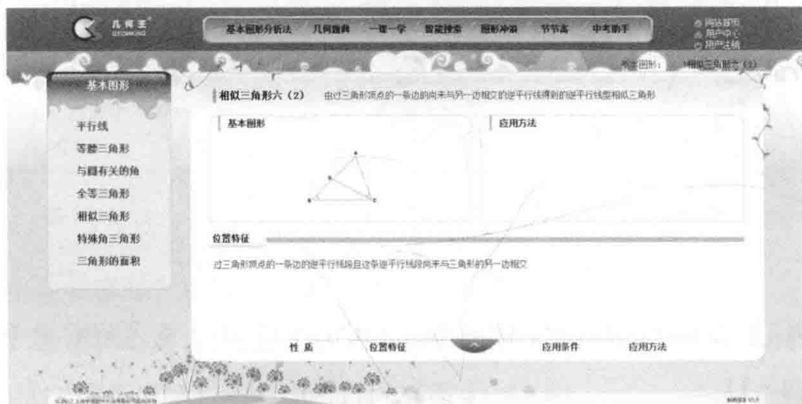
打开《几何王》初中平面几何学习软件(网络版),在“基本图形分析法”部分点击、打开过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形的基本图形(学生移动终端上同步显示).




学生阅读基本图形的性质:$\triangle ABC$ 中,$D$ 是 $AB$ 上的一点,$\angle ACD=\angle ABC\Rightarrow\triangle ACD\backsim\triangle ABC\Rightarrow AC^2=AD\cdot AB$




继续点击阅读基本图形的位置特征、应用条件和应用方法.



提问:由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形应在什么情况下应用呢?

回答:在几何问题中,当出现了过三角形顶点的一条边的逆平行线或者相乘两线段重叠在一直线上,且另一组相乘线段是一线段的平方时,就要想到应用或添加由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明.添加的方法是过端点和内分点作逆平行线.(5 分钟)

2. 看图训练

点击打开“图形冲浪”,练习第 63 题至第 67 题,倒计时时间设定为 30 秒,然后推送到学生的移动终端上,开始练习.(8 分钟)

要求学生练习完成后,点击“汇总”,查看自己的练习情况,发现自己的问题,然后推送到教师的电脑上.

收到全班的练习结果分析后,进行即时述评,并打开两位学生的答题情况,各选择一个错误进行点评和纠正.(13 分钟)

3. 例题教学

现在,先看今天的第一个例题.

在“智能搜索”功能,依次选取“等腰三角形”“角的度数”和“角平分线”后,可搜得例题如下,打开并推送到学生的移动终端.

【例 1】已知:$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle BAC=36^\circ$,$BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线.(图 3-4-1)

求证:$CB^2=CD\cdot CA$.



本题的教学采用设问和回答的方式进行.

问:拿到这个问题后,我们应怎样开始思考呢?

答:由于要证明的结论 $CB^2=CD\cdot CA$ 是线段之间的比例关系,因此应先进行描图,搞清楚比例线段之间的位置关系.

问:经过描图,可以发现什么?

答:可以发现 $CD$、$CA$ 这一组相乘线段重叠在一直线上,且出现了线段 $CB$ 的平方(图 3－4－2),所以就可应用由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明.

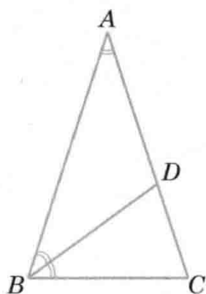


图 3－4－1

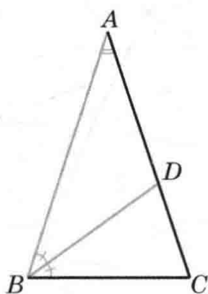


图 3－4－2

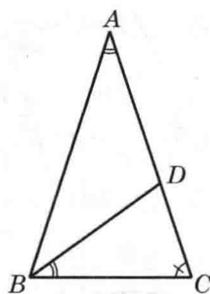


图 3－4－3

问:应找哪两个三角形相似?

答:根据将端点 $A$、内分点 $D$ 与重合的端点 $B$ 分别联结的方法,可以找到这对相似三角形应是$\triangle ABC$ 和$\triangle BDC$.(图 3－4－3)

问:要证明这两个三角形相似,关键是要证哪个性质?

答:关键是要证明 $CB^2=CD\cdot CA$ 的等价性质 $\angle BAC=\angle DBC$.

由于 $\angle BAC=36^\circ$,所以问题就转化为证明 $\angle DBC=36^\circ$,

又因为 $BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,所以 $\angle ABC=2\angle DBC$,那么问题就转化为证明 $\angle ABC=72^\circ$,由 $AB=AC$,可知 $\angle ABC$ 是这个顶角为 $36^\circ$ 的等腰三角形的底角,所以计算得 $\angle ABC=72^\circ$,就可以完成证明.(16 分钟)

在对整个问题的思维过程分析以后,由学生在自己的电脑上撰写问题的证明过程.

证明:$\because\ AB=AC$,

$\therefore\ \angle ABC=\angle ACB$.

又 $\because\ \angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$,

$\therefore\ \angle BAC+2\angle ABC=180^\circ$,

$\therefore\ \angle ABC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-\angle BAC)$.

又 $\because\ \angle BAC=36^\circ$,

$\therefore\ \angle ABC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$.

又 $\because$ $BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$\therefore\ \angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ$,

$\therefore\ \angle DBC=\angle BAC$.

又 $\because\ \angle BCD=\angle ACB$,

$\therefore\ \triangle CBD\backsim\triangle CAB$,

$\therefore\ \frac{CB}{CA}=\frac{CD}{CB}$,

$\therefore\ CB^2=CD\cdot CA$.

学生撰写证明完成后,推送到教师的电脑,进行电脑批阅和分析.教师浏览后,进行分析讲评.(20 分钟)

接下来,看第二个例题.

在“智能搜索”功能中，依次选取“等腰三角形”“点在直线上”和“延长”后，可搜得例题如下.




打开并推送到学生的移动终端.




【例 2】 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$D$ 是 $AB$ 上的一点，延长 $AB$ 到 $E$，$AB^2=AD\cdot AE$，联结 $CE$、$CD$.(图 3-4-4)

求证：$BC$ 平分 $\angle DCE$.

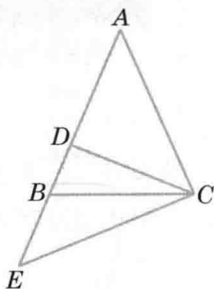


图 3-4-4

本题主要由学生阅读分析过程，要求学生在阅读过程中，看明白是找哪两个三角形相似，关键是证哪个性质.

学生由 $AB^2=AD\cdot AE$，想到 $AC^2=AD\cdot AE$，再找到应证$\triangle ACD$ 和$\triangle AEC$ 相似，明白关键是证明$\angle ACD=$

$\angle AEC$,就达到要求.(25 分钟)

然后,要求学生将分析过程再看一遍.(28 分钟)

接下来,看第三个例题.

在“智能搜索”功能中,依次选取“三角形”“角平分线”和“线段的垂直平分线”后,可搜得例题如下.




【例 3】已知:$\triangle ABC$ 中,$AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,$AD$ 的垂直平分线交 $AD$ 于 $E$、交 $BC$ 的延长线于 $F$.(图 3-4-5)

求证:$FD^2 = FC \cdot FB$.

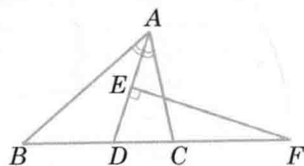


图 3-4-5

打开并推送到学生的移动终端.

本题主要由学生在阅读分析过程的基础上进行讨论.



启发性的讨论主题是：当成比例的四条线段都重叠在一直线上时，可以想到应用什么方法来思考？

本题思路的主线是什么？

本题和前两题进行比较，可以发现它们的分析方法有哪些共同之处？

分析：由于条件给出了 $EF$ 是 $AD$ 的垂直平分线，因此可应用线段的垂直平分线的性质（图 3－4－6），即线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等来进行证明.

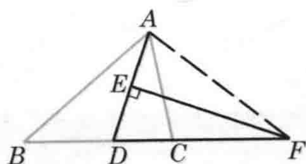



图 3－4－6

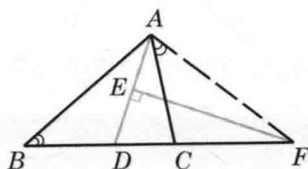



图 3－4－7

由于图形中已经出现了 $F$ 到端点 $D$ 的距离 $FD$，而没有 $F$ 到另一个端点 $A$ 的距离，因此要将这一距离添上. 于是联结 $FA$，可得 $FA=FD$，这样要证明结论 $FD^2=FC\cdot FB$，就转化为证 $FA^2=FC\cdot FB$.

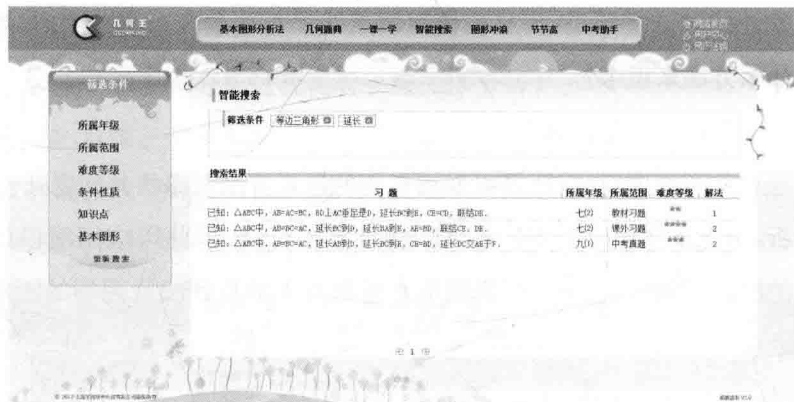
经过描图，可以发现 $FC$、$FB$ 这两条相乘线段重叠在一直线上，并且还出现了线段 $FA$ 的平方（图 3－4－7），可应用由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明.

可找到应证的相似三角形是 $\triangle FAC$ 和 $\triangle FBA$，关键是要证明 $FA^2=FC\cdot FB$ 的等价性质 $\angle FAC=\angle FBA$，显然，由 $AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，即 $\angle FAD=\angle FDA$ 就可以证明这两个角相等.（34 分钟）

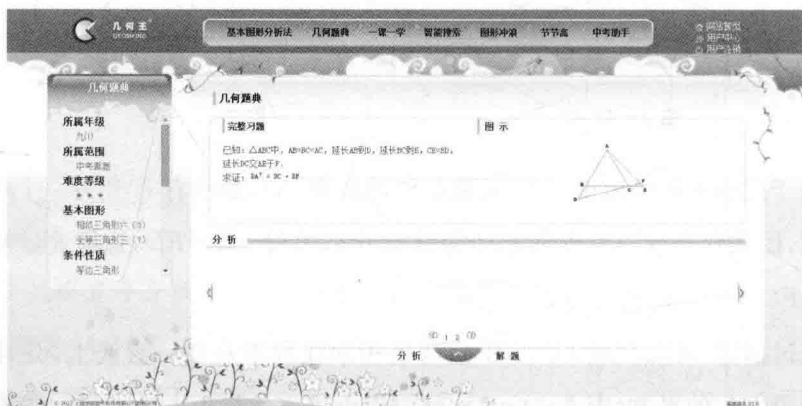
要让学生通过讨论和比较发现得到这三个例题的分析方法的共同规律性：条件或结论中都出现了一条线段的平方等于两条线段的积；相乘两线段重叠在一直线上，并且还出现了和它们有公共端点的线段的平方；都要寻找由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形.

接下来，看第四个例题.

在“智能搜索”功能，依次选取“等边三角形”和“延长”后，可搜得例题如下.




打开并推送到学生的移动终端.



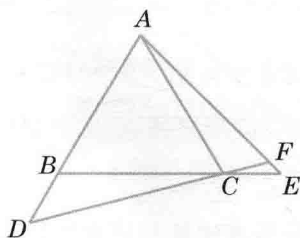



图 3-4-8

【例 4】 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=BC$，延长 $AB$ 到 $D$，延长 $BC$ 到 $E$，$CE=BD$，延长 $DC$ 交 $AE$ 于 $F$.(图 3-4-8)

求证：$DA^2=DC\cdot DF$.

本题要求学生进行快速浏览，在自己的电脑上写出思考这个问题的思路的主线；对线段之间的比例关系进行描图，发现比例线段的位置关系(图 3-4-9)，确定要应用由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明(图 3-4-10)，找到要证明的这对相似三角形，确定要证明这对三角形相似需要证明的关键性质.(37 分钟)

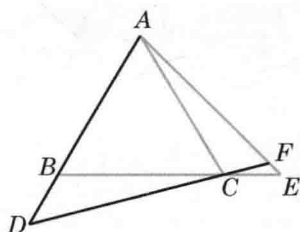



图 3-4-9

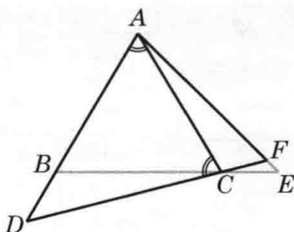



图 3-4-10

课堂教学小结:本节课我们复习了一类逆平行线型相似三角形,也就是由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形的性质的应用.这一类相似三角形应用的关键有两点,一是出现了三角形顶点的一条边的逆平行线,二是出现了相乘两线段重叠在一直线上,同时还出现了和它们有公共端点的线段的平方.

**布置作业**

在“智能搜索”功能,依次选取条件性质中的“等腰三角形”“延长”和基本图形中的“逆平行线型”后,可搜得习题如下.

几何王　基本图形分析法　几何题典　一课一学　智能搜索　图形冲浪　节节高　中考助手

所属年级
所属范围
难度等级
条件性质
知识点
基本图形

智能搜索

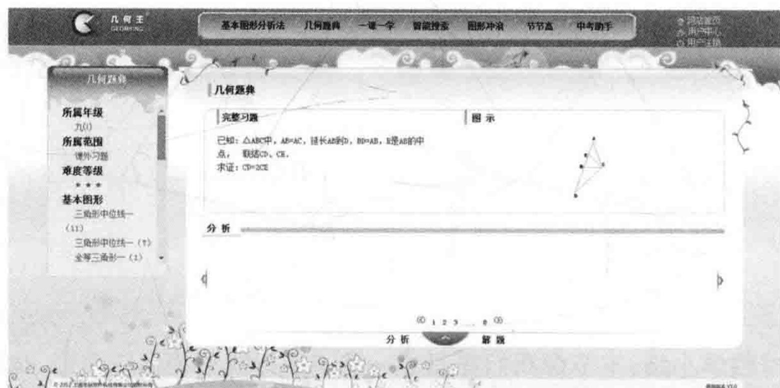
筛选条件　等腰三角形　延长　逆平行线型

搜索结果

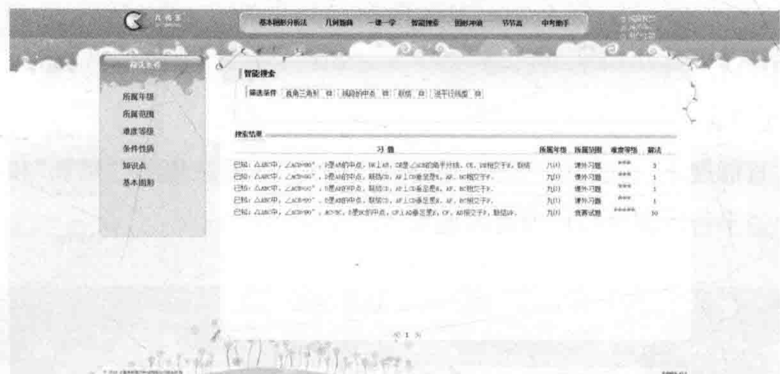
| 习题 | 所属年级 | 所属范围 | 难度等级 | 解法 |
|---|---|---|---|---|
| 已知:△ABC中,AB=AC,延长AB到D,BD=AB,E是AB的中点,联结CD、CE. | 九(I) | 课外习题 | *** | 8 |
| 已知:△ABC中,AB=AC,D是AB上的一点,延长AB到E,AB²=AD·AE,联结CE、CD. | 九(I) | 课外习题 | ** | 1 |

【习题 1】已知:$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,延长 $AB$ 到 $D$,$BD=AB$,$E$ 是 $AB$ 的中点,联结 $CD$、$CE$.

求证:$CD=2CE$.




在“智能搜索”功能，依次选取条件性质中的“直角三角形”“线段的中点”“联结”和基本图形中的“逆平行线型”后，可搜得习题如下.




【习题 2】已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$D$ 是 $AB$ 的中点，联结 $CD$，$AF\perp CD$，垂足是 $E$，$AF$、$BC$ 相交于 $F$.

求证：$CA^2=CF\cdot CB$



在“智能搜索”功能，依次选取条件性质中的“直角三角形”“垂直”“点在直线上”和基本图形中的“逆平行线型”后，可搜得习题如下.

【习题 3】已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足是 $D$，$E$ 是 $AC$ 上的一点，$\angle CBE=\angle CAB$.

求证：$BD\cdot BA=CE\cdot CA$.

搜索完成后，直接推送给学生.学生完成作业后，再推送到教师的电脑，完成电脑的批改，并形成批改、评价的结果和作业质量分析，供教师随时查看，学生也可以在自己的电脑上阅读作业评价.

## 《几何王》软件常态化教学教案二

课题：轴对称型的全等三角形的应用

（八年级第二学期）

**教学目标**

1. 熟悉轴对称型的全等三角形的位置特征、应用条件和应用方法，初步理解基本图形中的几何变换.

2. 学习使用规范的几何语言，有条理地表述推理过程.

3. 能够在较复杂的图形中认识轴对称型全等三角形的基本图形，体验几何学习中的转化思想.

4. 在较复杂的几何图形中，通过想象基本图形，学会添加辅助线，增强几何学习的信心.

**教学重点**

根据轴对称型的全等三角形的位置特征、应用条件和应用方法，熟练解决相关问题.

**教学难点**

利用《几何王》软件，在较复杂的几何图形中通过自己发现的基本图形，学会相应的添加辅助线的方法.

**教学环境**

电脑教室

**教学过程**

1. 概念复习

要求学生通过基本图形的位置特征和应用条件的分析，熟悉"轴对称型的全等三角形"的特征，为下阶段具体的解题做好准备.

学生在《几何王》软件主页面上，依次点击"基本图形分析法""全等三角形""轴对称型".

（1）展示基本图形

要求学生通过看图，发现两个基本图形所具有的位置特征：

两条相等的线段或者两个相等的角位于一个等腰三角形的轴对称部分(图 3-4-11)，或者两条相等的线段或者两个相等的角是关于某一条直线成轴对称的(图 3-4-12)；

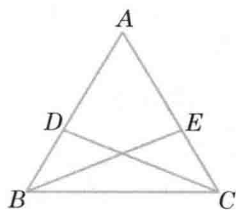



图 3-4-11

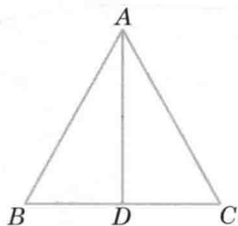



图 3-4-12

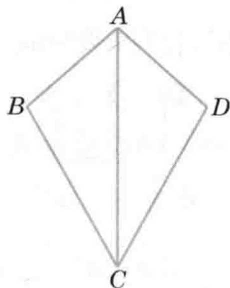



图 3-4-13

两条有公共端点的相等线段可以构成一个等腰三角形，所以两条相等的线段或者两个相等的角是关于等腰三角形底边的中垂线成轴对称的.

(2) 继续展示基本图形

要求学生通过看图，发现基本图形中的两组相等线段 $AB$、$AD$，$CB$、$CD$ 是关于 $AC$ 成轴对称的.(图 3-4-13)

重点突出出现两条相等的线段或者两个相等的角关于某一条直线成轴对称时，就可以添加轴对称型全等三角形来进行证明.添加的方法是在没有对称轴时添加对称轴；在有对称轴时，将三角形沿对称轴翻折过去.

2. 看图训练

点击“图形冲浪”，时间设定为 15 秒，练习第 21 至 25 题.然后推送到学生的移动终端上，开始练习.

学生练习完成后，要求每位学生点击“汇总”，看一看自己的练习情况，发现自己的问题，然后推送到教师的电脑上.

看到全班的练习结果分析后，先进行整体评价，指出共同性的问题，然后再看两名学生的答题情况，各选择一个错误进行纠正和指导.

3. 技能练习

学生点击“节节高”，做第七节.练习完成后，点击“汇总”，看一看自己的练习

情况，发现自己的问题，然后推送到教师的电脑上.

教师看到全班的练习结果分析后，进行简要的整体评价.

4. 例题教学

学生依次点击“智能搜索”“直角三角形”“角的度数”和“线段的垂直平分线”，搜到需要的例题.

【例 1】已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$AB$ 的垂直平分线交 $AB$ 于 $D$、交 $AC$ 于 $E$.（图 3－4－14）

求证：$DE=\frac{1}{3}AC$.

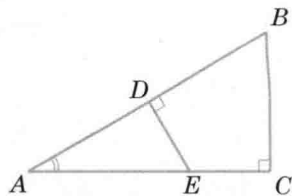


图 3－4－14

学生集体读题，然后进行思考.分析过程用提问法进行.

问：这个问题应从什么性质开始思考？

答：本题条件中给出 $DE$ 是 $AB$ 的垂直平分线（图 3－4－15），所以想到要应用线段的垂直平分线的性质也就是等腰三角形中重要线段的基本图形的性质进行证明.

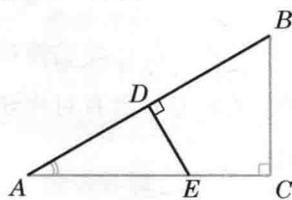


图 3－4－15

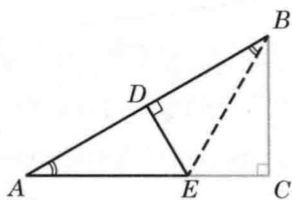


图 3－4－16

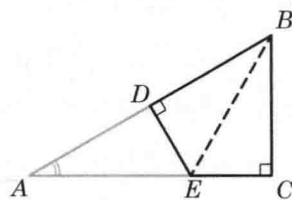


图 3－4－17

问：怎样在图形中找到这个基本图形？

答：现在图形中有等腰三角形的底边和一条腰，所以应先将另一条腰添上，也就是联结 $BE$（图 3－4－16）.

问：可得到什么性质？

答：可得到 $AE=BE$.

问：接下来的思路是什么？

[要求学生明白通过轴对称型全等三角形 $BED$ 和 $BEC$（图 3－4－17），得

到 $DE=CE$，$\triangle AED$ 是 $30°$ 角的直角三角形，得到 $DE=\frac{1}{2}AE$，就达到要求.]

依次点击“智能搜索”“三角形”“倍角”和“角平分线”，搜到需要的例题，推送到学生的电脑.

【例 2】已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=2\angle ACB$，$AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线.(图 3-4-18)

求证：$AC=AB+BD$.

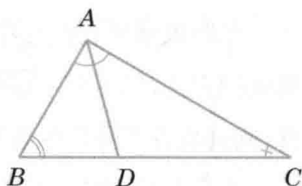


图 3-4-18

学生集体读题，然后进行思考.

引导学生由条件 $AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线，发现$\angle BAD$ 和$\angle CAD$ 这两个相等的角是关于 $AD$ 成轴对称的，所以可添加轴对称型全等三角形进行证明.添加的方法是将三角形沿 $AD$ 翻折过去.

这时将哪个三角形翻折过去就出现了两种可能：将$\triangle ABD$ 沿 $AD$ 翻折过去(图 3-4-19)和将$\triangle ADC$ 沿 $AD$ 翻折过去(图 3-4-20)，对这两种可能的分析过程，由学生打开《几何王》软件，自己进行阅读.

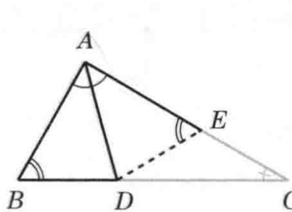


图 3-4-19

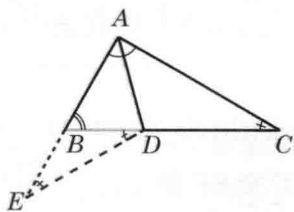


图 3-4-20

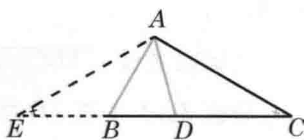


图 3-4-21

接下来，请一位学生讲一下在自己阅读的分析过程中，关键是证明了哪一个性质，如能讲清楚，说明学生真的理解了.

要求学生书写完成其中一种解法的证明过程.对先完成证明过程书写的学生，要求他们阅读第三种分析的可能性.(图 3-4-21)

5. 拓展提高

依次点击“智能搜索”“三角形”“倍角”“垂直”和“延长”，搜到需要的例题，推送到学生的电脑.

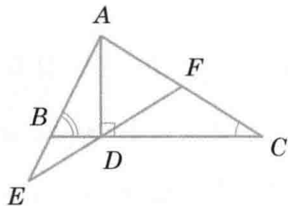


图 3-4-22

【例 3】已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=2\angle ACB$，$AD\perp BC$，垂足是 $D$，延长 $AB$ 到 $E$，$BE=BD$，延长 $ED$ 交 $AC$ 于 $F$.（图 3-4-22）

求证：$AB=DC-DB$.

本题由学生在电脑上先画出自己想到的添加辅助线的方法，然后分小组进行讨论，探讨不同的解题思路.然后打开《几何王》软件，阅读软件上介绍的各种解题思路.

分析 1：在 $DC$ 上截取 $DG=DB$（图 3-4-23），联结 $AG$，应证 $AB=AG=GC$.

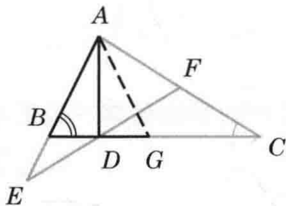


图 3-4-23

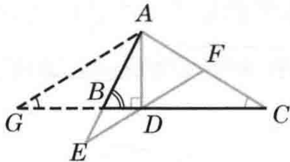


图 3-4-24

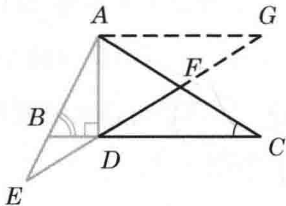


图 3-4-25

关键是通过$\angle ABC=2\angle ACB$，证明 $AG=GC$.

分析 2：延长 $DB$ 到 $G$，使 $BG=BA$，联结 $AG$（图 3-4-24），应证 $DG=DC$.

关键是通过$\angle ABC=2\angle ACB$，证明$\angle AGD=\angle ACG$.

分析 3：过 $A$ 作 $AG/\!/BC$ 交 $EF$ 的延长线于点 $G$.（图 3-4-25）

关键是通过$\angle ABC=2\angle ACB$ 和 $BE=BD$，证明$\angle FDC=\angle FCD=\angle GAF$，$AF=CF$.再通过证明$\triangle AFG\cong\triangle CFD$，得到 $AG=DC$.

接下来的关键就是通过$\angle AGE=\angle BDE=\angle AED$，证明 $AG=AE$.

分析 4：过点 $E$ 作 $EG/\!/DC$，过点 $C$ 作 $CG/\!/DE$ 交于点 $G$，联结 $AG$，$AG$、$EF$ 相交于 $H$.（图 3-4-26）

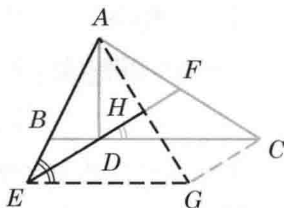


图 3-4-26

通过四边形 $DEGC$ 是平行四边形，可以推得$DC=EG$.

关键是通过$\angle ABC=2\angle ACB$和$BE=BD$，证明$FD=FC=FA$，接下来的关键是通过$FH \parallel CG$，得到$AH=HG$，再由$\angle AEH=\angle GEH$，证明$AE=EG$.

《几何王》软件共介绍了八种解题方法，每位学生在找到自己的解题方法后，可仔细研读分析思路，学习用规范的语言来分析几何习题.本题的教学目的就是开拓思路，提高思维能力.

课后继续应用《几何王》软件，自主学习不同解法的分析过程.

6. 课堂小结

本节课我们一起讨论和学习了如何应用轴对称型全等三角形的基本图形的性质，来分析和思考问题，找到解决问题的方法.今后在解题时，如果遇到较复杂图形，我们也可以先在头脑中思考基本图形的应用条件，构建基本图形，通过将基本图形补完整的添加辅助线的方法，把复杂图形拆分成基本图形，从而完成解题.

7. 课后作业

依次点击“智能搜索”“等腰三角形”“点在直线上”“相等”；依次点击“智能搜索”“等腰三角形”“线段的中点”搜索到习题后，推送给学生，作为回家作业.

## 《几何王》软件常态化教学教案三

课题：三角形中位线性质的应用

（八年级第二学期）

**教学目标**

1. 进一步理解三角形中位线的性质定理，能够熟练应用定理来解决较复杂的几何证明题.

2. 在自主探究与合作学习中，学习、领会和掌握应用三角形中位线的基本图形的几种辅助线的添加方法，感受数学学习的乐趣.

**教学重点**

三角形中位线性质定理的应用.

**教学难点**

发现并归纳三角形中位线的辅助线添线方法.

**教学环境**

多媒体教室.

**教学过程**

1. 复习

在前面几节课中,我们已经学习了三角形中位线的概念及其性质定理,本节课我们将应用《几何王》软件进一步研究、解决与三角形中位线有关的证明问题.

问:请一位学生叙述三角形中位线的性质定理的内容.

答:三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半.

在《几何王》软件主页面上,依次点击“基本图形分析法”“相似三角形”“三角形的中位线”,学生同步进行.展示基本图形.

问:怎样用符号语言来表示三角形中位线的性质定理?

答:∵ $D$、$E$ 分别是边 $AB$、$AC$ 的中点,

∴ $DE /\!/ BC$,且 $DE=\frac{1}{2}BC$.(图 3-4-27)

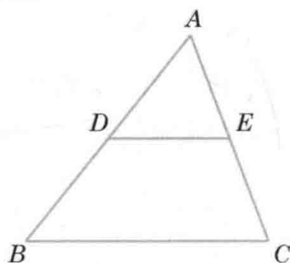


图 3-4-27

三角形中位线的性质定理中,出现了四个性质,在应用时就会出现多种情况,如果是出现两个中点,那么就是多个中点问题;如果是出现一个中点和过这个中点作的一条边的平行线,那么就是直接构成三角形的中位线;如果是出现一个中点和线段之间的倍半关系,那么线段之间的倍半关系是和线段的中点发生联系的;如果是出现两条平行线段之间的倍半关系,那么也可以直接构成三角形的中位线.

2. 看图训练

现在,我们进行应用三角形中位线性质定理的看图训练.

点击“图形冲浪”,时间设定为 30 秒,练习第 57 至 60 题,然后推送到学生的移动终端上,开始练习.

练习完成后,要求每位学生点击“汇总”,看一看自己的练习情况,发现自己的问题,然后推送到教师的电脑上.

教师看到全班的练习结果分析后，先进行整体评价，指出共同性的问题，然后再看两名学生的答题情况，各选择一个错误进行纠正和指导.

小结：同学们都做得很好，我们可以发现刚才这四个题目的共同特点就是都应用了三角形中位线的基本图形的性质.

3. 三角形中位线的基本图形的应用方法介绍

现在，我们来学习应用三角形中位线的基本图形进行证明时，出现的几种重要的添线方法.

在《几何王》软件中，依次点击“基本图形分析法”和“三角形中位线”，再点击相应的图标，就可得到相应的添加辅助线的方法的介绍.学生在自己的电脑上阅读相应的内容.

在几何问题中，出现了多个中点，且有两个中点所在的线段具有公共端点，这两个中点的连线就是三角形的中位线.

若有中位线而三角形不完整，则将三角形的边添上(图 3-4-28)；若有三角形而没有中位线，则将三角形的中位线添上.(图 3-4-29)

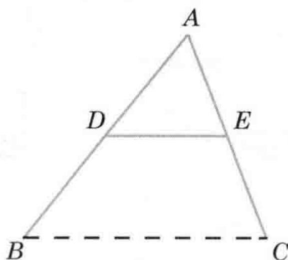


图 3-4-28

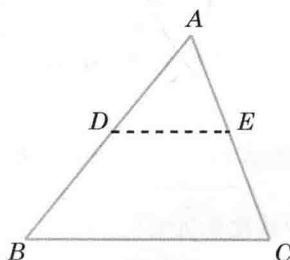


图 3-4-29

4. 例题教学

依次点击“智能搜索”“三角形”“作正方形”“线段的中点”，搜索出例题后，推送给学生.

【例 1】已知：$\triangle ABC$ 中，以 $AB$ 为边向 $\triangle ABC$ 外作正方形 $AEDB$，以 $AC$ 为边向 $\triangle ABC$ 外作正方形 $ACFG$，$H$ 是 $BC$ 的中点，$I$ 是 $BE$ 的中点，$J$ 是 $CG$ 的中点，联结 $HI$、$HJ$.(图 3-4-30)

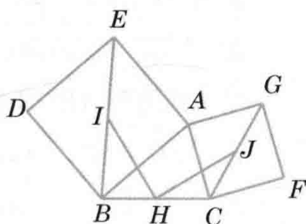


图 3-4-30

求证：$HI=HJ$.

本题学生思考的关键，是要发现条件给出的"$H$ 是 $BC$ 的中点，$I$ 是 $BE$ 的中点"应怎么应用.

由于这里出现了两个中点，因此可应用或添加三角形中位线的基本图形进行证明.

又因为 $H$、$I$ 所在的线段 $BC$、$BE$ 具有公共端点 $B$，可以组成三角形，所以 $HI$ 这两个中点的连线就是三角形的中位线.

现在图形中有中位线而三角形不完整，所以应将三角形的边添上.于是联结 $CE$，可得 $HI\parallel CE$，$HI=\frac{1}{2}CE$.(图 3-4-31)

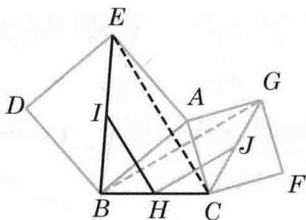


图 3-4-31

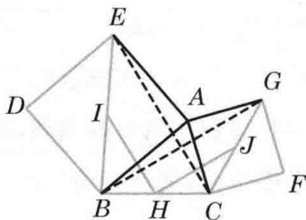


图 3-4-32

同理，联结 $BG$，可得 $HJ\parallel BG$，$HJ=\frac{1}{2}BG$.

问题就转化为证 $CE=BG$.

接下来，引导学生发现应通过一对旋转型全等三角形(图 3-4-32)，即 $\triangle AEC\cong\triangle ABG$ 来完成分析.

由一名学生口述证明过程.

证明：联结 $CE$、$GB$.

在$\triangle AEC$ 和$\triangle ABG$ 中，

$\because$ 四边形 $AEDB$ 和四边形 $ACFG$ 都是正方形，

$\therefore$ $AE=AB$，$\angle EAB=\angle CAG=90^\circ$.

$\therefore$ $\angle EAC=\angle EAB+\angle BAC=90^\circ+\angle BAC$，

$\angle BAG=\angle CAG+\angle BAC=90^\circ+\angle BAC$.

∴　$\angle EAC=\angle BAG, AC=AG$,

∴　$\triangle AEC\cong\triangle ABG$.

∴　$CE=GB$.

又∵　$BH=CH, BI=EI$,

∴　$HI\parallel CE, HI=\frac{1}{2}CE$.

同理可证 $HJ\parallel BG, HJ=\frac{1}{2}BG$.

∴　$HI=HJ$.

下面我们看例题 2.

依次点击“智能搜索”“等腰三角形”“延长”“相等”和“线段的中点”，搜索出例题后，推送给学生.

【例 2】已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，延长 $AB$ 到 $D$，$BD=AB$，$E$ 是 $AB$ 的中点，联结 $CD$、$CE$.（图 3－4－33）

求证：$CD=2CE$.

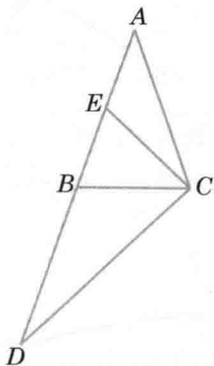


图 3－4－33

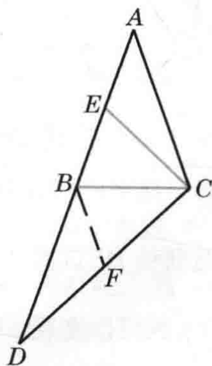


图 3－4－34

本题要求学生独立完成，然后同桌之间交流自己的解题方法和思路.

分析 1：本题中，学生在根据线段之间的倍半关系的定义，在取了 $CD$ 的中点 $F$ 后，关键的问题是要发现 $B$、$F$ 这两个中点所在的线段具有公共端点 $D$，可以组成三角形，现在图形中有三角形而没有中位线，所以要将中位线添上.于是联结 $BF$（图 3－4－34），可得 $BF\parallel AC, BF=\frac{1}{2}AC$.

从而通过$\triangle BCE \cong \triangle BCF$，就可以完成证明.

分析 2：本题在分析上出现的难点是已知的两个中点所在的线段是重叠线段，不能组成三角形，所以这两个中点所在的线段也就不是三角形的中位线，这时就要增加中点，且应增加和已知中点所在的线段有公共端点的线段的中点.

于是取$AC$的中点$F$，现在图形中有三角形而没有中位线，所以要将中位线添上.于是联结$BF$(图 3－4－35)，可得$BF \parallel DC$，$BF=\frac{1}{2}DC$.从而通过$\triangle BCE \cong \triangle CBF$，就可以完成证明.

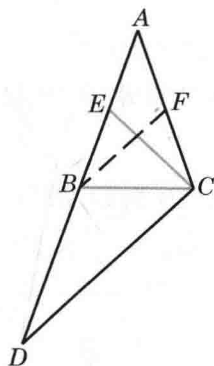


图 3－4－35

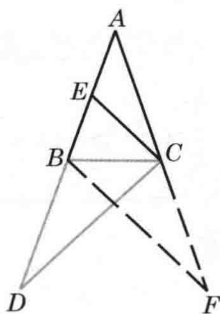


图 3－4－36

分析 3：如果想到要使$C$成为中点，那么延长$AC$到$F$，使$CF=AC$.而另一个中点选取$AB$的中点$E$，那么图形中有中位线而三角形不完整，所以要将三角形的边添上.于是联结$BF$，(图 3－4－36)可得$EC \parallel BF$，$EC=\frac{1}{2}BF$.从而通过$\triangle ABF \cong \triangle ACD$，就可以完成证明.

在《几何王》软件中，还介绍了这道习题的多种分析思路和方法，学有余力的学生可以课后自学.

三角形中位线的基本图形在应用时还有另一种可能情况，就是出现了与线段的中点有联系的两条线段之间的倍半关系，这时就要想到应用三角形中位线的基本图形进行证明.此时还有两种可能性：一是将倍线段取作三角形的边，就要添中位线；一是将半线段取作三角形的中位线，就要将三角形添完整.

接下来，我们看例 3.

依次点击“智能搜索”“三角形”“倍角”和“垂直”，搜索出例题后，推送给学生.

【例 3】已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=2\angle ACB$，$AD\perp BC$，垂足是 $D$，$E$ 是 $BC$ 的中点.（图 3-4-37）

求证：$DE=\frac{1}{2}AB$.

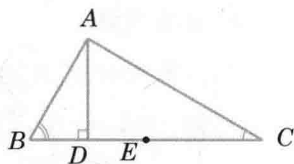


图 3-4-37

分析：本题思考的第一个难点，就是要证明的结论 $DE=\frac{1}{2}AB$ 是两条线段之间的倍半关系，且又给出 $E$ 是 $BC$ 的中点，可应用三角形中位线的基本图形进行证明.若将倍线段 $AB$ 取作三角形的边，则图形中是有三角形而没有中位线，于是应将中位线添上，即取 $AC$ 的中点 $F$，联结 $EF$（图 3-4-38），可得 $EF\parallel AB$，$EF=\frac{1}{2}AB$.

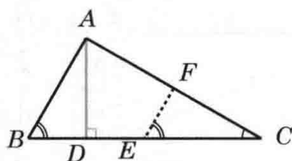


图 3-4-38

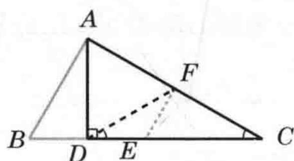


图 3-4-39

接下来的关键问题就是要证明$\triangle EDF$ 是等腰三角形.

由 $AD\perp BC$，垂足是 $D$，$F$ 是 $AC$ 的中点，可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质，联结 $FD$（图 3-4-39）可得 $FD=FC$，$\angle FDC=\angle FCD$.

所以再应用$\angle ABC=2\angle ACB$ 和 $EF\parallel AB$，就可以完成证明.

本题要求学生在自己的电脑上完成分析、思维过程，并推送到教师的电脑上，由电脑完成批改，并展示质量分析结果.

对于《几何王》软件介绍的其他各种分析方法，学生可以课外进行自学和研究.

5. 课堂小结

（1）本节课我们主要复习了三角形中位线性质定理和它的应用，它有两个

方面的结论，一是位置关系上的，一是数量关系上的；

(2) 归纳了三角形中位线的基本图形的应用方法和添线方法；

(3) 通过例题的学习，真正体会到添加辅助线的规律性.

6. 作业布置

(1) 依次点击"智能搜索""三角形的中位线一(1)""倍线段"，搜索得到：

已知：$\triangle ABC$ 中，$BC=2AB$，$D$ 是 $BC$ 的中点，$E$ 是 $BD$ 的中点，联结 $AD$、$AE$.

求证：$AC=2AE$.

(2) 依次点击"智能搜索""三角形的中位线一(6)""正方形"搜索得到：

已知：正方形 $ABCD$ 中，$E$ 是 $AB$ 的中点，$F$ 是 $BC$ 的中点，$G$ 是 $CD$ 的中点，$H$ 是 $DA$ 的中点，联结 $EF$、$FG$、$GH$、$HE$.

求证：四边形 $EFGH$ 是正方形.

(3) 依次点击"智能搜索""三角形的中位线一(7)""正方形"，搜索得到：

已知：正方形 $ABCD$ 中，$E$ 是 $CD$ 的中点，联结 $BE$，$F$ 是 $AD$ 上的一点，$DF=\frac{1}{4}AD$，联结 $EF$.

求证：$BE=2EF$.

将习题推送到学生的电脑上，学生在电脑上完成作业后推送递交.

# 第四章　评价思维过程

## 第一节　思维能力评价

教育的最终目标，当然是教育质量，而教育质量的高低优劣，又必须经过质量的评价，所以教育的发展、教育改革都无法回避质量评价这一核心问题.

要进行教育质量评价，首要的问题是确定评价标准和评价方法，不同的评价标准、评价要求会得到不同的甚至是反差非常大的评价结果.即使是同样的评价标准、评价要求，采用不同的评价方法，也会得到不一样的评价结果.

我们已经知道，教育是有一个过程的，一门学科的教学少则一年，多则三年、五年，有以“百”为数量级的课时数，而考试呢？限于时间、精力等多方面因素的制约，只能限定在很短的时间内(60 分钟、90 分钟、120 分钟等)完成.所以，我们通常讲的教育质量评价，一直都是一种以局部的考试评价来取代对整体的教育质量进行评价的模式，由此当然会引发考试实施过程中的诸多问题.

当社会的教育处于“识记教育”阶段时，教育质量最重要的内涵是用记忆来表现的，考试的主要形式就是默写，学生想要符合考试要求，就一定要把知识内容背出来.

当教育从“识记教育”阶段发展到“学练教育”也就是“双基教育”阶段时，教育质量的最重要的内涵也就从“记住”发展到了“会做”“会熟练地做”.那么怎样才能达到“会做”的水平呢？由于“会做”是从教师示范开始的，是从教师手把手教开始的，所以学生首先进行模仿.然而，在模仿的过程中，记忆又开始起作用，只是从知识、概念的记忆，发展到了对方法的记忆，也有部分学生会发展到对例题和习题解法的记忆.现在有相当一部分学生尽管训练了不少题目，模拟了相当多的考试，但遇到“新面孔”的考试题目还是不会做，这就说明他们在平时学习中展现的“会做”还是一种建立在记忆基础上的“会做”，而不是建立在通过自己的积极思维、真正将题目想出来这样一种基础上的“会做”.当然，就“会做”的要

求而言，考试已经出现了在能力和思维方面的要求，但总体上还是在“会做”的范畴内.

长期以来，无论是默写还是会做，教育质量是通过什么来评价的呢？毫无疑问，是通过考试中学生完成的答卷质量来评价的.默写对不对是看答案的，会做不会做也是看答案的，在考卷上学生书写出来的答案，几乎就是和教育的质量画等号的.

然而，考卷上的答案是否就能代表教育的质量呢？显然是不完全能的.考试中，学生的答题会出现这样几种情况：一是学生完全依靠自己的独立思考，将试题的解法想出来了，当然这是要付出时间成本的；二是已经做过、甚至做过多次并已达到熟练程度的题目，正好被选作考试试题，学生也回答得完全正确；三是有的题目本身比较简单，如有的判断题、选择题，学生可以靠猜测选对、答对；四是有的学生对有的题目完全靠死记硬背，甚至是考试这段时间内强行记住，但考试一结束就会全部忘记；五是有的学生是抄来的，甚至是通过作弊来完成的.从试卷的答案上看，这些学生都对，都可得满分，但教育的质量显然是不一样的.总之，考卷上的答案不能真正代表学生真实的教育质量，这实际上也是传统的考试制度、考试方法和教育质量评价所存在的主要问题之一，当然也是我们考试制度改革所要突破和解决的一个重要问题.

根据人的智能的记忆、技能和能力的层次结构，无论是从理论上还是从实践上来说，教育质量的评价都应该是具有科学性的，所以都应该全面地、完整地从这几个层次上进行测评，获得相应的教育质量测评结果.

由于我们的教育对知识、记忆、技能的考试评价都有相当成熟的要求、标准和做法，所以目前关键的问题就是要解决能力的考试评价问题.

在教育尤其是教学领域，人的能力，通常都被界定为分析问题和解决问题的能力，其核心是思维能力，所以能力的考试和评价也就定位在思维能力的考试和评价上.

教育质量的评价，从对知识、记忆、技能的考试评价发展到在此基础上增加专门针对思维能力的测试和评价，对于教育的发展、教育的改革、教育所追求的理念、人的科学发展、考试制度和方法的改革，都具有重要的意义.

第一，从教育的发展来讲，对思维能力的测试、评价的解决和实施，是具有里程碑意义的飞跃和突破.多少年来，我们的教育一直徘徊于识记和学练的阶段，许多社会各界(包括教育界)的有识之士看到了传统教育的这一弊端，发表了种种要改变这种现状的慷慨激昂的见解、意见、建议，教育行政部门也早在多年前就已将“加强基础、培养能力、发展智力”作为教育发展的目标，但都没有能够改变这样一种徘徊的状态.这里除了由于相当一部分学校的领导和教师囿于传统的观念，很重要的一个原因就是对怎样培养能力，怎样发展智力的问题都说不明白，尤其是怎么来进行评价，具体怎样落实在教学中、考试中都不清楚.思维能力怎么在常态化中进行考试评价，不仅是指我们在很小的范围内做几次实验所进行的测试评价，而且也指在常态化考试中所进行的考试评价，应该怎么考，应该怎么评，这都是以往的传统教育没有涉足过的领域.这个问题的提出、实践和解决，将为教育的发展开创新的天地，推动质的飞跃.

第二，从教育的改革来说，对思维能力测试、评价的解决和实施，也是具有重大意义的.回顾教育改革所走过的历程，我们深切地感受到，教育在各种层面的改革最后都会被考试制度、考试方法、考试形式牢牢地控制着.因为任何一项改革举措，都要落到提高教育质量上，如果一项教育改革的结果是导致教育质量下滑，那毫无疑问这项改革举措就一定会就此打住.而一提到教育质量，当然就会联系到质量评价，就会引出考试这根“指挥棒”.为什么我们的许多教育改革的探索、实践、研究在小学阶段、初中低年级阶段可以搞得丰富多彩，生动活泼，显示出教师的探索精神和创新精神，而到了初三年级、高中阶段，教育改革的探索、实践、研究就会一下子偃旗息鼓、鸣金收兵了呢？说穿了，不就是被“中考”“高考”牢牢控制着吗?！我们想尽办法要减轻学生过重的课业负担，不提倡在教学中搞“题海战术”，但在实际教学中，学生的课业负担减轻了吗？不少学校的“题海战术”还在继续，甚至愈演愈烈.所以教育界许多专家、学者都正确地指出，考试制度改革应是教育改革的源头，是应该牵的“牛鼻子”.然而考试制度又应如何改呢？这些年来，我们的考试改革也是在不断探索，不断实践，不断推新，但根本的问题并没有解决.实际上，只要我们的考试仍然是以知识、记忆、技能为考查内容的，那么传统的考试所出现的问题和弊端都将会长期存在.只有当

我们的考试从重对知识、记忆、技能的测评发展到对思维能力的测评，考试制度的改革才会出现一次真正的飞跃和突破.考试的目标一旦落实到对思维能力的测试、评价的解决和实施，同样会给我们的教育发展、改革产生强有力的引领作用，对教学内容、教学方法、教学形式、教学手段的发展、改革产生不可低估的推动作用，对信息技术在教育教学中的常态化应用产生积极的影响.

第三，辩证唯物主义的一条基本原理，就是存在决定意识，对思维能力的测评没有在考试中出现以前，人们不会形成相应的教育理念，而对思维能力的测评在考试中得以实现并能正确实施之后，“存在”不一样了，人们的教育理念、教育观念就会发生变化.教师对自己工作的认识，就不会仅仅满足于向学生传授知识，教会学生掌握技能并进行不断的训练，而是要教育学生掌握正确的、科学的思想方法，激发学生进行积极的思维，提高学生的思维层次，培养学生的思维能力，如果我们的教学工作都能建立在这样一种教育理念的基础上，并落实到教学工作中，那我们无疑是打开了一个人才资源、智力资源的宝库，产生人才培养上的核变效应.

第四，以思维能力的测评为主要目标的考试，付之实践后，对学生的科学发展、全面发展也会起到正确的指导和引领作用.不少以死记硬背来应对考试的学生将会明白，即使题目背出来了，但思维能力水平不高还是不行的.这样就能真正使思维能力强、思维水平高的学生确立或显示出他们的优势，同时也给思维能力差的学生指明了今后努力的方向，这不就是教育所追求的目标吗?

第五，以思维能力的测评为主要目标的考试付之实践后，将对考试制度、考试方法的改革产生革命性的影响.对思维能力的评价，通过什么方式才能实现呢? 如果仍然通过答案的对错来进行评价，那就会走回到原来的老路上.所以必须走出一条新路，这就必须寻找新的途径、新的方法，尤其是要将信息技术、信息手段深度融合到考试中来.

综上所述，对思维能力进行测试和评价，是一项充满着探索性、创新性的系统工程，也是一项意义非凡的系统工程，为了真正实现教育现代化的目标，让我们为此而努力奋斗吧!

## 第二节　思维过程评价

教育质量的评价,要重在思维能力的评价上.那么怎样来进行思维能力的评价呢?

首先,人的思维能力本身具有相当丰富的内涵,所以我们首先将要进行评价的思维能力定位在逻辑思维能力上.

要进行逻辑思维能力的考试和评价,首先就要解决逻辑思维能力的可展示、可评价问题.逻辑思维能力的展示只有两个途径,一是展示思维的过程,二是展示思维的结果.仅仅用思维的结果来进行教育质量测评,会出现较大的误差,不能准确地评价思维能力的水平,所以就必须通过思维的过程来进行逻辑思维能力的评价.实际上,将思维过程作为逻辑思维能力评价的主要指标一经落实,关于对思维结果的评价,也就一并实现了.

思维过程指的是拿到一个问题后,是怎样开始或者是从什么地方开始进行思考的,是怎样一步一步想出来的这样一个过程,思维过程的展示就是要将这一过程展示出来.《几何王》软件作为一款以思维过程的可视化为核心技术的智慧教育软件,对于几何问题中具有规范性的思维过程的展示、示范及可视化,都已经可以实现.现在的问题是要通过学生的思维过程的展示来进行逻辑思维能力的考核和评价,也就是要将每一位学生的思维过程都展示出来.由于学生的思维具有很强的个性化特点,其中经常会出现许多不具规范性但却是学生乐于使用的表达或书写方式,所以要实现学生思维过程的展示,需要解决的问题就要复杂得多,这显然是一场新的挑战.

拿到一个问题后是怎样想的?是从哪里开始思考的?即使是对一个并不是很复杂的问题来说,学生的思考也会出现多种可能的情况.其中可能有若干种想法是正确的,也可能有几种想法是不正确的,无法获得正确的结果,作为学生

思维过程的显示，都应该显示出来.再进一步，学生在开始思考以后，是怎样一步一步想出来的？具体的思路是什么？那出现的情况将更是千姿百态、千差万别了.有的学生想到某一步，就已经出现错误了；有的学生想到某一步，就想不下去了；有的学生想到某一步，思维绕了一个圈，又回到原来的出发点了；有的学生想到某一步，逻辑推理出现了问题，等等，但不论出现的可能情况有多少种，都应将每位学生的思维过程展示出来.

基于上述这样的情况，实现学生思维过程的展示必须要解决以下几个问题.

一是学生思维过程以怎样的形式来展示.显然，这时已经不可能采用传统的作业或试卷形式了，而必须采用信息技术在电脑上显示来实现.要学生在作业本上或试卷上展示自己的思维过程，这个目标的实现是很难做到的.这时，信息技术的优势就显现出来了，学生在电脑上可以按照一定的要求来书写和展现自己的思维过程，这就从根本上解决了学生思维过程展示的技术上的关键问题.

二是解决好规范性表述与学生个性化表述之间的差异问题.电脑的操作、信息技术的应用都要建立在规范化表述和以此为前提的程序编制的基础上.所以要学生在各种移动终端上展示自己的思维过程，首先要培养他们尽可能使用规范化的语言和模板来进行表述，要使大多数学生达到逐步掌握并能熟练地进行操作的程度.能做到这样程度的学生越多，学生思维过程的展示也就会做得越好.

由于学生终究是处于一个学习的过程中，不管我们作多少指导和训练，学生还是有可能会出现不规范的表达和书写，而就思维过程而言，甚至还会出现冷僻、怪异的可能，这也就是在教育中随机出现的个性化问题.即使出现这样的情况，也必须要将学生的思维过程完整地展示出来.

综上所述，学生思维过程的显示，既要实现学生使用规范化语言和模板来表述思维过程的目标，也要兼顾学生没有使用规范化语言和模板，而是使用随机的、个性化的语言来表述自己的思维过程的情况，也就是既要解决大多数学生在规范化表达基础上的思维过程的展示问题，也要为少数学生出现的种种思维过程上的特例和别出心裁的、甚至是奇思怪想的思维过程留下展示的空间.

三是要努力将学生具有跳跃性、瞬时性的思维过程展示出来.思维的跳跃，是教学过程中学生进行思维时出现的一种常见现象，指的是学生在思考一个问题的过程中，突然萌发的一种看上去和原来的思维活动没有联系的思维成果的现象.这时的思维过程可能发生在一瞬间，要将这样一种瞬时间发生的思维过程表述出来，显然会有很大的难度.思维过程的跳跃还有一个特点，就是不一定与已有的思维成果存在明确的逻辑推理关系，学生可能一时也说不清楚，要将这样一种思维过程一步一步表示出来，显然也是不容易的，这就需要在理论研究和技术研究上有所突破，解决这个问题.

四是要解决学生思维过程表述的冗长性问题.如果要求学生对每一个问题都要展示自己的思维过程，就会发现大量问题的思维过程的表述会很烦琐，很冗长，一个很清晰的只需几步即可解决的问题，要用规范化的语言或模板来表述，可能需要多几倍的语言量来实现，而且学生在学习中也有一种天然的本性，就是尽可能地采用最简洁的语言来进行表达，他们也常常不愿意采用舍简就繁的方式来解答问题.因此，在经过表达思维过程的基本训练，并在规范化的表达已经达到要求以后，随着思维能力的不断提升，就需要推出思维过程的简化表述规范，以增强应用的实效性.

在以上这些问题得到解决以后，学生思维过程的展示功能也就可以实现，可以从拿到一个问题后的思维起点开始，将其思维过程一步一步在电脑上表示出来，同时也可以是以书写、填充、选择、判断等多种不同的形式来实现.

学生的思维过程一经显示，接下来就进入了思维过程和结果的评价阶段.

考试是由教师命题，在学生预先不知试题的前提下进行的.如果学生考试前已经看到了试题，甚至针对试题作了准备，那考试也就失去了基本的意义和价值.正因为这样，所以教师必定要在考场上即时发出考卷，而从信息技术的应用来说，就是要在考试时将试题即时推送给学生.所以，对学生的逻辑思维能力的评价，要从试题的推送开始.

当然，由于首先是要将学生的思维过程显示出来，所以问题并不是简单地将教师所命的试题推送给学生就可以了，而是要先将所命的试题改写成能实现思维过程显示这一目标，且能在电脑上进行操作的试题模式，然后实现上网运

行.直到考试开始的时候,教师才将试题推送给参加考试的全体学生.

学生在电脑上收到试题后,就可以开始考试,学生应根据试卷上的要求和相应的说明,完成自己思维过程的书写和显示,在考试结束时,将自己的考试结果推送到教师的电脑上.

教师的电脑在接收到学生发出的考试结果后,即可完成试卷的电脑批改,实际上也就完成了思维过程和思维结果的评价.

根据逻辑思维能力评价的要求,每一道试题都会根据实际要达到的思维能力水平,标注能力的等级(或星级)标志,并根据学生在考试中实际达到的能力等级(或星级)进行评价.

接下来的关键,就是能力的等级(或星级)标志的设置问题.我们知道,逻辑思维就是根据规范的逻辑结构和严格的逻辑推理方法由因导果或执果溯因的思维形式.其核心的内容就是三段论证,即由大前提、小前提,推出结论.

假如一个问题是由一个三段论证来解决的,也就是大前提、小前提都是已知的或是纯属常识范围内的性质,要求证得的结论也是明确的,那完成这样一个逻辑推理过程就是技能上的要求,这样的题目在能力测试上的等级就为 0 级或 0★级.

如果一个问题需要由两个三段论证来完成,其中第一个三段论证得到的结论是第二个三段论证的一个条件,也就是出现了逻辑思维的最简单的思维链,这时作为连接这两个三段论证的桥性质(我们将这样的性质称为桥性质),在给出的条件中是没有的,是隐含的,而这个性质对第二个三段论证的进行和实现又是必不可少的,显然具有这样重要价值的桥性质,是需要在第一个三段论证的过程中通过推理来自己发现的,这时就体现了能力的要求,我们可以将这一级的思维能力的等级确定为半★级.

当然,如果一道具有这样要求的题目,学生是做过的,那么他也可以记住或者训练出来,但即使会做这道题目,也必须一步一步地回答和展示自己是怎样想的,以实现测评思维能力的目标.

如果一个问题需要由三个三段论证来完成,其中第一个三段论证得到的结论是第二个三段论证的一个条件,第二个三段论证得到的结论是第三个三段论

证的一个条件,也就是出现了逻辑思维的二级思维链,显然这时就出现了两个桥性质,这两个桥性质都需要学生在前两个三段论证的过程中通过推理来自己发现,因为要通过两次推理发现,其难度比之一个桥性质的推理发现常常要困难得多.在平面几何学习的开始阶段,许多学生面对逻辑思维的最简单的思维链都是很快就跃过去了,但面对逻辑思维的二级思维链时,许多学生进行了相当大的努力,但就是跃不过去,显然这是思维能力发展上的一次挑战,而如果教师直接将这个桥性质告诉学生,学生虽然会做了,但思维能力发展的这一步也就缺失了,因此,这里就体现了进一步的能力要求,我们可以将这一级的思维能力的等级确定为★级.

如果一个问题需要由四个三段论证来完成,其中第一个三段论证得到的结论是第二个三段论证的一个条件,第二个三段论证得到的结论是第三个三段论证的一个条件,第三个三段论证得到的结论是第四个三段论证的一个条件,也就是出现了逻辑思维的三级思维链,显然这时就出现了三个桥性质,这三个桥性质都是需要在前三个三段论证的过程中通过推理来自己发现的,因为要通过三次推理发现,其难度显然又提高了,思维能力的要求也就会更高,我们可以将这一级的思维能力的等级确定为 1.5★级.

显然,这个过程可以一直进行下去,科学研究的许多著作,可能要在展示由数百个、数千个、数万个、数亿个甚至更高的数量级的三段论证构成的思维链来完成的推理证明过程的基础上进行撰写.然而对几何教学来说,根据教学的要求和学生实际能力水平发展的要求,我们所讨论的问题一般都选定在 10★级的难度之内,因为对学生来说,这样的星级难度已经足够了.

如果对一道综合性较强的几何问题进行分析,可以发现有的题目出现的逻辑思维的思维链可能由不止十个三段论证组成,甚至出现由数十个这样数量级的三段论证组成,但这时我们也会发现,相应出现的桥性质也可以分成两类:一类是对整个逻辑推理过程是起着关键作用的必不可少的,我们可以称之为关键桥性质;另一类是相比较而言不具有关键的作用,而且这个桥性质又是可以被关键桥性质覆盖、包含、简化,或者与关键桥性质相比思维难度要小很多的,我们可称之为非关键桥性质.于是,我们对逻辑思维能力的评价就确定在关键桥性

质上，即我们只对每一个问题的关键桥性质确定星级，对非关键桥性质不设定星级，也就是即使通过了这一步，能力的星级也不上升.当然，思维过程中的这些步骤电脑上都是会记录的，分析还是同样进行.

在进行逻辑思维能力的测试和评价时，当然也不能略去对学生在知识记忆和技能掌握方面的测试和评价.对知识记忆的测试和评价，原则上只涉及本道试题中的重要的一个或两个知识点(概念)，评价的标准也就是“是”和“非”.对技能掌握的测试和评价，仅涉及出现了基本技能掌握要求的试题，由于技能的表述是有确定步骤的，所以就可以按照步骤进行“对”和“错”的评价，也就是可以指出学生的错误是发生在第几步上.

电脑完成了作业或试题的批改、评价以后，教师就可以获得有关的质量分析数据.

一是全班学生获取知识、掌握技能和培养逻辑思维能力方面的全部数据，并可展示成相应的列表或图像.如全班学生对每一个测评的知识点的记忆所显现的“是”和“非”的结果，包括正确人数和百分比，发生错误的共性原因，与上一次的测评数据进行比较的结果；全班学生对每一个基本技能掌握与否的结果，包括在每一个步骤上发生错误的学生人数，从而实际上也就掌握了学生在每一个步骤上发生错误的原因，与上一次的测评数据进行比较的结果；全班学生在逻辑思维能力测评方面达到不同的能力星级的学生数，与前若干次的测评数据进行比较的结果等.

二是可以有目的地展示每一个学生的测试数据，包括每一个学生在获取知识、掌握技能和培养逻辑思维能力方面的具体数据，并可将这些数据以每一个学生为主体展示成相应的列表或图像.

在这一部分，教师可以清晰地看到每一个学生对每一个测评知识点的记忆所显现的具体的“是”和“非”的结果，发现其出现错误的原因，并可与最近一个阶段的同类知识点学习结果进行比较，发现其掌握知识点状态的变化走向；同样也可看到这名学生对每一个基本技能掌握与否的结果，包括他的错误具体发生在哪一个步骤上，其出现错误的原因，也可与最近一个学习阶段的技能学会和掌握情况进行比较，发现其掌握技能状态的变化走向；还可以看到这名学生

在逻辑思维能力发展方面所达到的等级,发现最近一个学习阶段逻辑思维能力发展的趋势等.

三是可以分析学生思考每一个问题的思路中出现的共性和个性,有多少学生是按同一条思路去思考问题,哪些学生是按大家都不易想到的思路去思考这个问题,而且也获得了成功的,等等.

同时,每一名学生同样可以在自己的电脑上看到自己的作业或试题经电脑批改以后的评价结果,发现自己在知识记忆、技能掌握和能力培养等方面出现的问题,看到自己学习总体状态的发展走势,明白自己进一步学习需要努力的方向和有针对性的学习内容、学习指导意见.

# 第三节　思　维　树

进行逻辑思维能力的测评，必须通过思维过程的展示来实施，这就需要有基础理论和信息技术两方面的支持.

支持思维过程的形象化展示的基础理论就是思维树理论.

拿到一个几何问题后，应从什么地方开始思考？答案一般都不是唯一的，哪怕是一道最简单的、只有一个条件和一个结论的问题，是选择从条件开始思考还是从结论开始思考就出现了两种可能性.所以拿到一个几何问题后，从什么地方开始思考就是几何问题思维过程的第一个思维节点.在这个思维节点上，接下来进行的就是扩散思维.

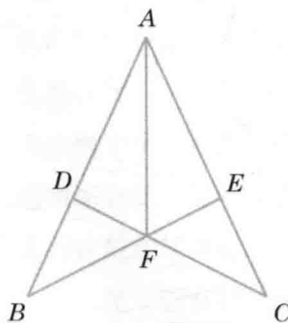


图 4-3-1

【例】已知：$AB=AC$，$D$ 是 $AB$ 上的一点，$E$ 是 $AC$ 上的一点，$AD=AE$，$BE$、$CD$ 相交于 $F$，联结 $AF$.(图 4-3-1)

求证：$AF$ 平分$\angle BAC$.

这个问题给出了六个条件性质和一个要求证的结论.拿到这个问题后，应从什么地方开始思考？选择从哪一个性质开始思考，就有七种可能性，即使其中有的可能性也许是很难想出正确解法的.由于系统首先需要显示学生的思维过程，而学生的思维活动在进行的时候，除了条件、结论的制约，是没有任何束缚的，我们并不知道某一位学生的思路会向什么方向发展或出现遗漏，所以对于每一个思维节点，都必须将所有的可能情况列举出来，而不能遗漏.当然，这是理想的追求目标，在系统的研制过程中，有的问题常常不能一下子就做到理想的状态，首先可以做到的是尽可能多地将扩散思维发挥到极致，将可能的情况都列举出来，同时也为以后可能出现的新的可能性(当然应该是尽可能少的)留下进一步拓展的空间.

在第一个思维节点上得到了各种可能性以后，就可以选取其中的某一种可能性来进行讨论，也就是进入了集中思维的阶段.这时系统提出的问题就是“你为什么会选用这个性质”.

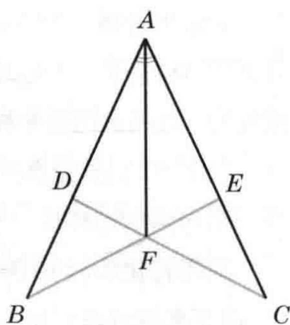


图 4-3-2

如果有的学生是根据这个问题的结论“$AF$ 平分 $\angle BAC$”开始思考的(图 4-3-2)，那为什么是选取从结论而不是从条件开始讨论呢？这时思维活动进入了第二个思维节点，这次选择当然是有道理的，所以系统可以给出相应的理由以供判断和选择：①出现了两个相等的角；②出现了两个要证明相等的角是关于 $AF$ 成轴对称的；③出现了两个要证明相等的角是成中心对称的；④出现了两个角之间的倍半关系.显然，这时的选择有可能是正确的，也有可能是错误的，对于出现错误的选择，也可以给出选择错误的原因，实际上评价已经实施了.对于出现选择是正确的情况，思维过程就得以继续进行.

如果选取的是“出现了两个要证明相等的角是关于 $AF$ 成轴对称的”，那么接下来系统就要问：“应选取哪个基本图形进行证明？”这时思维活动就进入了第三个思维节点，由于这一次的因果关系比较明显，就是要应用轴对称型全等三角形进行证明，所以可以选用填充题，也可以选用选择题.

接下来系统就会提出问题：“应证哪两个三角形全等？”这时思维活动就进入了第四个思维节点.由于这时可以证明的轴对称型全等三角形有两对，不是唯一的，所以在这里又要进行一次扩散思维(两种可能性)，也就是可以证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACF$(图 4-3-3)，也可以证明 $\triangle ADF \cong \triangle AEF$(图 4-3-4)，由于这两种可能性是并列的，因此可分别进行讨论.

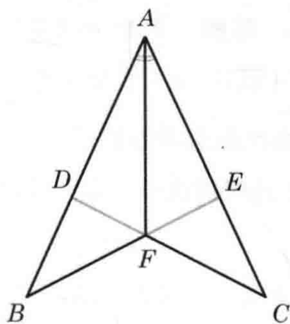


图 4-3-3

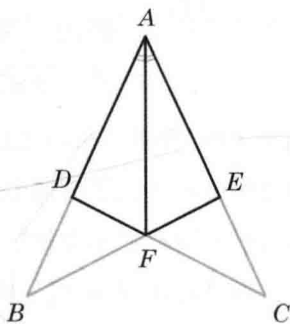


图 4-3-4

若选取证明$\triangle ABF \cong \triangle ACF$,则系统会提出问题:“现在已经有的全等条件是什么?”这就是第五个思维节点.由于条件已经给出 $AB=AC$,$AF=AF$,系统会继续提问:“还应证明哪个性质?”此时应证明 $BF=CF$,这就是第六个思维节点.

接下来就是“应选用哪条全等三角形的判定定理进行证明”,应选取 S.S.S.来证明这两个三角形全等,这就是第七个思维节点.

问题转化为应证 $BF=CF$,一轮应用全等三角形的分析过程到这里就完成了,接下来就可以开始第二轮的全等三角形证明的分析过程,直到分析过程全部完成.

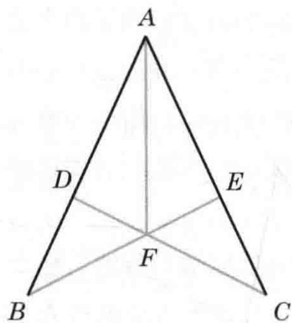


图 4-3-5

如果有的学生是根据这个问题所给出的条件 $AB=AC$ 开始思考的(图 4-3-5),那么这时思维活动就进入了第二个思维节点,这次选择当然也是有道理的,所以系统也可以给出相应的理由以供判断和选择:①出现了两条相等的线段;②出现了两条具有公共端点的相等线段;③出现了两条平移的相等线段;④出现了两条关于 $AF$ 成轴对称的相等线段.这次的选择中有两个选项是正确的,可以使思维过程进行下去.如果学生选择的是两个错误的选项,那么同样可以给出发生错误的原因,并进行评价.

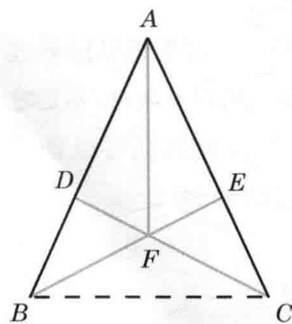


图 4-3-6

如果选择的是正确的选项——出现了两条具有公共端点的相等线段,那么系统也会继续提出问题:“应选取哪个基本图形进行证明?”这时思维活动进入了第三个思维节点.系统同样可以给出选项以供判断和选择:①等腰三角形;②等腰三角形中的重要线段;③直角三角形斜边上的中线;④轴对称型全等三角形.

在正确地选择“等腰三角形”的选项后,系统就会继续提问:“基本图形是否完整?”这时思维活动进入了第四个思维节点.这时的选项只有两项,即“完整”和“不完整”,正确的选择是“不完整”.

系统就会继续提出问题:应怎样添加辅助线? 这时思维活动进入了第五个思维节点,可直接填充“联结 $BC$”.(图 4-3-6)

接下来同样可以根据这条思路一步步地进行下去，直到问题解决.

对于在第一个思维节点上出现的每一种可能情况，都可以进行这样的讨论，在每一个思维节点上，如果出现扩散思维的要求，那就将所有的或者尽可能多的可能情况列举出来；如果出现的是集中思维的要求，系统就会列举出若干种选项供判断或选择，如选项本身比较少时，可选取判断题或填充题来实施判断或选择.每一种可能性在这样的讨论过程中经过一步步深化发展，直到最终问题的解决或者最终发现是走不通的.

在完成了所有可能情况的讨论以后，我们可以将每一种可能情况看成是一枝一枝的思路，包括在思维发展过程中又派生出来的一枝一枝的思路，然后将所有思路拼到一张图上，得到的就是一棵树的形状，我们称之为"思维树".

有了思维树作为基础，思维过程的显示和评价系统的核心问题也就解决了.学生拿到一个问题以后，他是怎么开始思考的？他在通过每一个思维节点时是怎么想的？他的思路是按哪一条枝一步步走下去的？他对这个问题的思考，是想到哪一步想不下去了？他对这个问题的思考，是想到哪一步出现了错误？他对这个问题的思考，是怎样出现绕圈子、思维循环后又回到了原来的思维节点上的？这些在移动终端上都可以清清楚楚地展示出来.

以这样的方式对学生进行考试测评，可以清楚地显示有多少学生的思维通过了第一个思维节点，有多少学生顺利地通过了第二个思维节点，有多少学生顺利地通过了第三个思维节点，直到最后，有多少学生顺利地通过了最后一个思维节点而完成整个问题的思维过程，真正实现了对学生的思维能力、思维水平和思维品质的评价.

# 第四节　应用《思维王》软件评价思维过程

将信息技术的应用建立在思维树基础上，获得的成果就是思维过程的显示和评价系统——《思维王》软件.

《思维王》软件是一款最新研制成功的智慧教育软件，它的核心功能就是在实现师生互动的基础上，对每一位学生的思维过程和思维结果实现即时的显示和评价，并对学生进一步的学习给出有针对性的个性化的指导.

**《思维王》软件的使用**

首先，打开“学生思维过程的显示和评价系统”主页，然后，通过输入正确的用户名、密码、验证码进行登录.




教师用教师账号点击登录，进入《思维王》软件的教师使用页面，如下所示.




学生用学生账号点击登录，进入《思维王》软件的学生使用页面，如下所示.




1. 教师账号使用软件(习题测试)

第一步：点击左上角“主菜单”中的“我的习题”或者下方“习题测试”模块当中的“练习”，进入习题搜索功能.



第二步：输入搜索条件后，点击“搜索”按钮会弹出相应习题，搜索功能的目的是使教师方便地搜索到自己需要的题目.

第三步：每道习题后面都有一个“收藏夹标志”，点击其中一道或多道习题，可将该道习题添加到收藏夹当中.收藏夹的主要作用是方便教师留存备用习题，有时搜索到的题目不一定马上就用，或一次搜索的题目较多，准备分几次用，有了收藏夹，教师在选题方面就很方便，可根据需要随时调整.

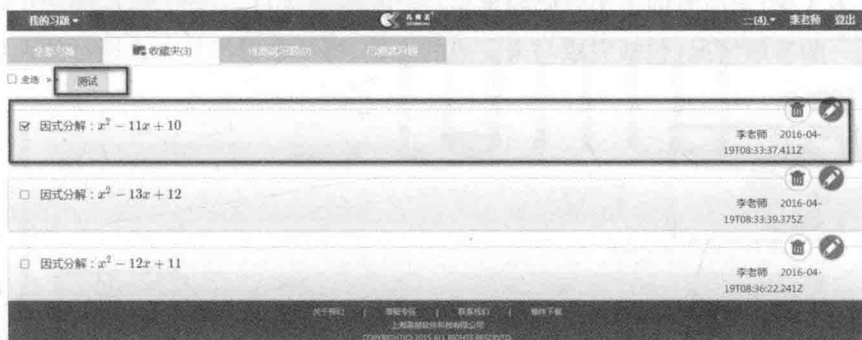
第四步：点击“收藏夹”，会出现教师已经保存在收藏夹的所有习题.

第五步：勾选其中一道或多道习题，然后点击“测试”，该道习题会自动添加到“待测试习题”里，教师也可点击“答题键”自己进行答题(详见第八步).

第六步：点击“待测试习题”会显示教师从“收藏夹”中刚刚勾选的所有习题.

第七步：勾选其中一道习题，点击“执行键”，则学生可在自己的账号里找到该道习题，然后学生即可点击“答题键”进行答题；教师也可以点击“答题键”同时查看这道习题的分析过程.




第八步:学生在自己的电脑上答题,将思维过程在电脑上一步一步展示出来,教师可根据测试的实际情况,适当进行测试的管理工作,包括巡视、时间控制等.

第九步:教师点击"停止键",则学生将不能继续进行答题,然后教师点击"结束"按钮,该道习题会自动添加到"已测试习题"模块当中,表明该道习题测试完成.

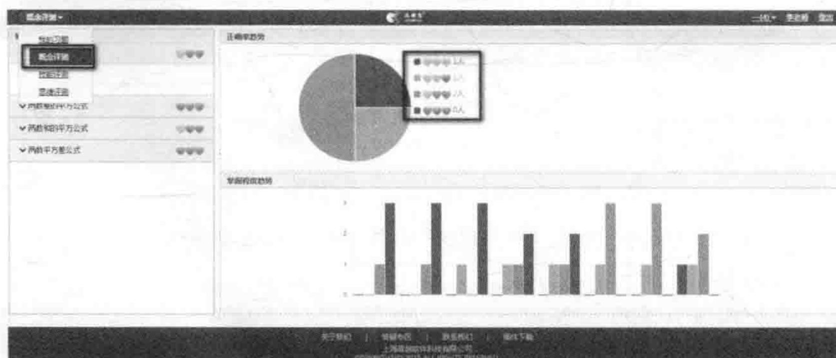




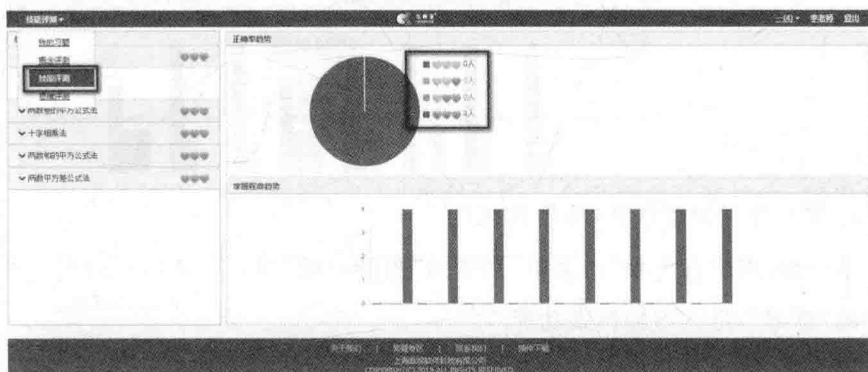

第十步：当所有的学生答题结束后，点击“思维统计”，会得到全班学生单道题逐一的答题情况（包括完成与未完成的人数、每一个思维节点未通过的人数）.



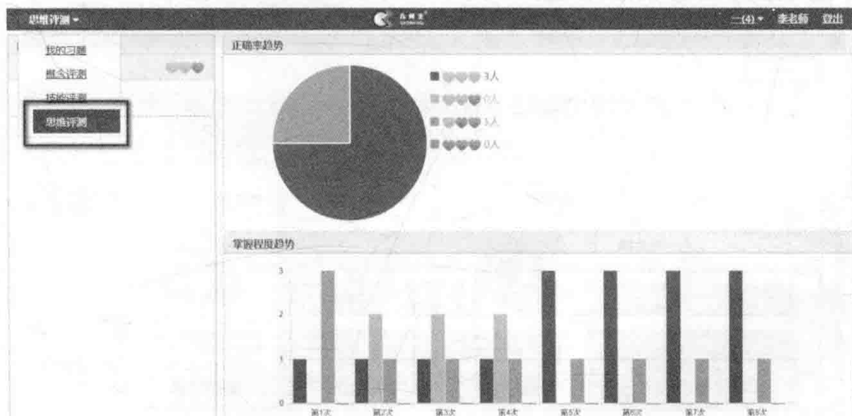
第十一步：点击“概念测评”，会得到全班学生关于测试概念或知识点的答题统计情况以及最近八次对同一概念或知识点掌握情况的发展走势，点击相应星级会看到该级别的学生名单.星级级别会随着学生答题正确数量的增加而增加，随着错误数量的增加而减少.



第十二步:点击“技能评测”,会得到全班学生关于测试技能掌握的答题统计情况以及最近八次对同一技能掌握情况的发展走势,点击相应星级会看到该级别的学生名单.星级级别会随着学生答题正确数量的增加而增加,随着错误数量的增加而减少.



第十三步:点击“思维评测”,会得到全体学生的答题统计情况,包括每一星级级别的学生人数,点击相应星级会看到该级别的学生名单.星级级别会随着学生答题正确数量的增加而增加,随着错误数量的增加而减少.




第十四步:教师可选择不同班级,查看每个班级的答题统计情况.



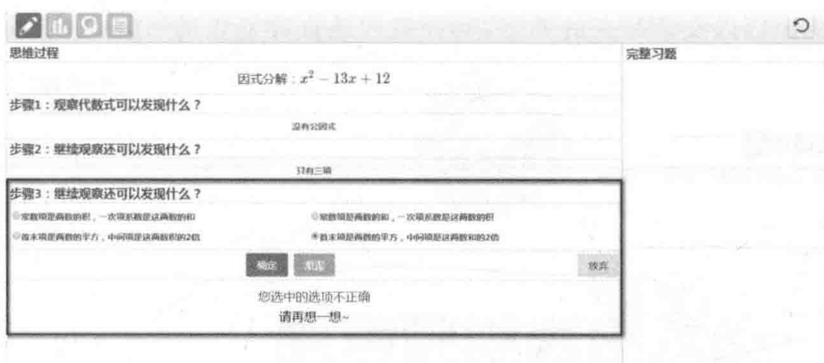
2. 学生账号使用软件(习题测试)

第一步:点击左上角“主菜单”当中的“我的习题”或者下方“习题测试”模块当中的“练习”,进入习题搜索功能.

第二步:进入习题搜索功能后会看到教师推送的所有习题.

第三步:点击“答题键”,学生会进入答题界面,按照页面的指引一步一步进行操作,答对的步骤会直接跳到下一步,答错的步骤会给出相应的指引直到答对为止,然后继续下一步;若在答题过程中遇到答题困难无法继续进行,可点击“放弃键”或“返回键”结束答题.

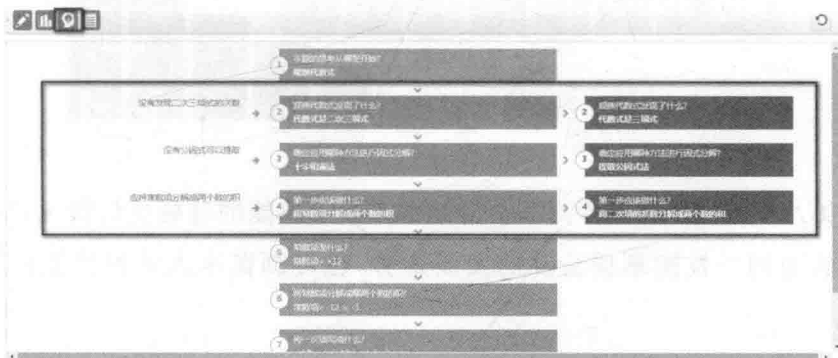





第四步：完成全部答题后，点击“数据分析”，会看到自己的错误，错误发生在哪一步和发生错误的原因等信息.

| [illegible] | | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ✔ | 本题的思考从哪里开始?<br>观察代数式 | 知识点 | |
| 2 | ✘ | 观察代数式发现了什么?<br>代数式是三项式 | 知识点 | 没有发现二次三项式的次数 |
| 3 | ✘ | 确定应用哪种方法进行因式分解?<br>提取公因式法 | 知识点 | 没有公因式可以提取 |
| 4 | ✘ | 第一步应该做什么?<br>将二次项的系数分解成两个数的和 | 知识点 | 应将常数项分解成两个数的积 |
| 5 | ✔ | 常数项是什么?<br>常数项= +12 | 知识点 | |
| 6 | ✔ | 将常数项分解成哪两个数的积?<br>常数项= -12 × -1 | 知识点 | |
| 7 | ✔ | 将一次项写成什么?<br>$-13x=(-12)x+(-)x$ | 知识点 | |
| 8 | ✔ | 得到的结果是什么?<br>$x^2-13x+12=(x-12)(x-1)$ | 知识点 | |

第五步：点击“思维分析”，即可浏览思维过程中出现的错误，指出原因，并给出正确的思维分析过程.



第六步：点击“习题推荐”，系统会根据学生在测试中发生的错误、产生

错误的原因以及学习上的不足，有针对性地推荐适量的习题，供继续学习使用.

A同学，根据你思考本题的情况，建议你完成下列练习题

已知：AD=AE，BD=CE

求证：AB=AC

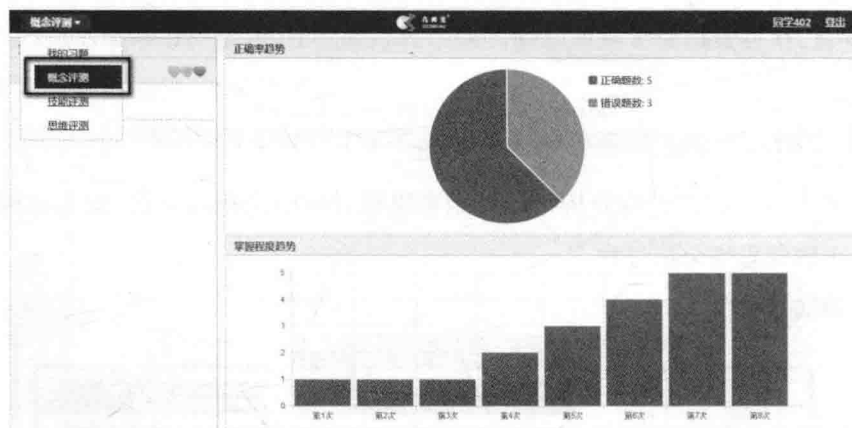
已知：AD=AE，BD=CE

求证：AB=AC

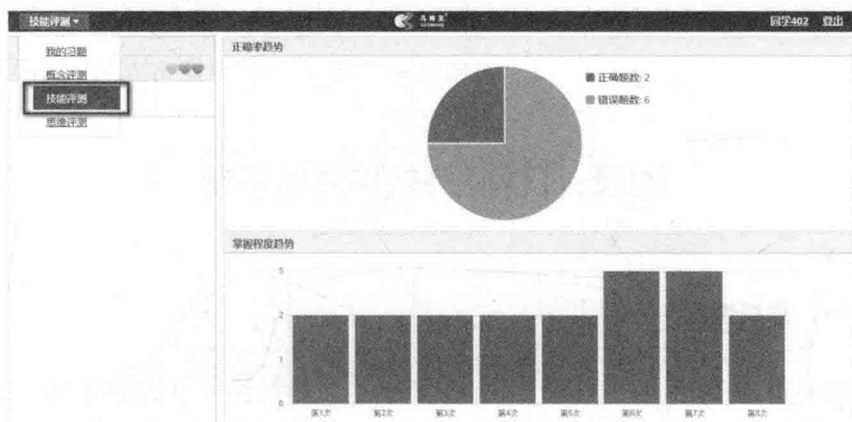
已知：AD=AE，BD=CE

求证：AB=AC

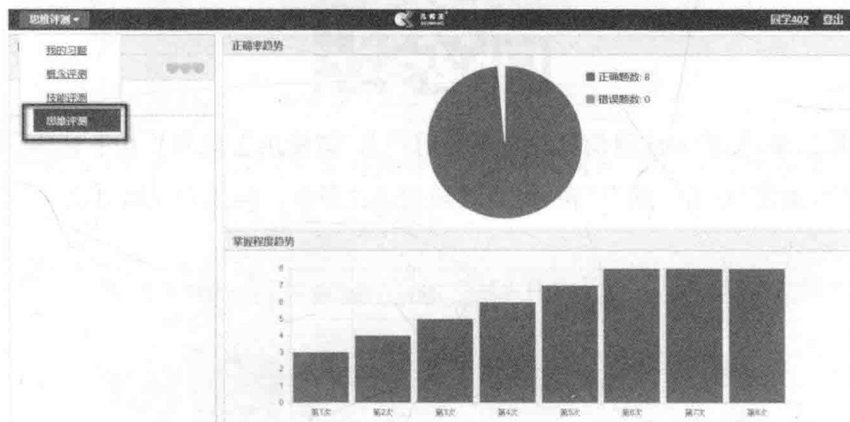
第七步：在教师点击“结束”按钮后，学生可点击“概念评测”，会得到本人关于概念或知识点的答题统计情况以及最近八次对同一概念或知识点掌握情况的发展走势，也可浏览本人掌握概念和知识点的星级情况.




第八步：点击“技能评测”，会得到本人关于技能的答题统计情况以及最近八次对同一技能掌握情况的发展走势，也可浏览本人掌握技能的星级情况.




第九步:点击“思维评测”,会得到本人关于思维能力测评指标的统计情况以及最近八次在逻辑思维能力方面的发展走势,也可浏览本人在逻辑思维能力发展方面所达到的星级情况.



# 附录:《几何王》软件注册系统

## 一、常规情况

第一步:请用手机扫描以下二维码,跳转至软件的注册页面.在电脑上操作的用户,请在浏览器中手动输入网址:http://jc.001jihe.com.



第二步:请输入注册信息时需要的用户名(请使用手机号)、初始密码,确认密码后,点击“点击注册”按钮,将会跳转到该注册账户的用户激活页面.

几何王 软件注册系统

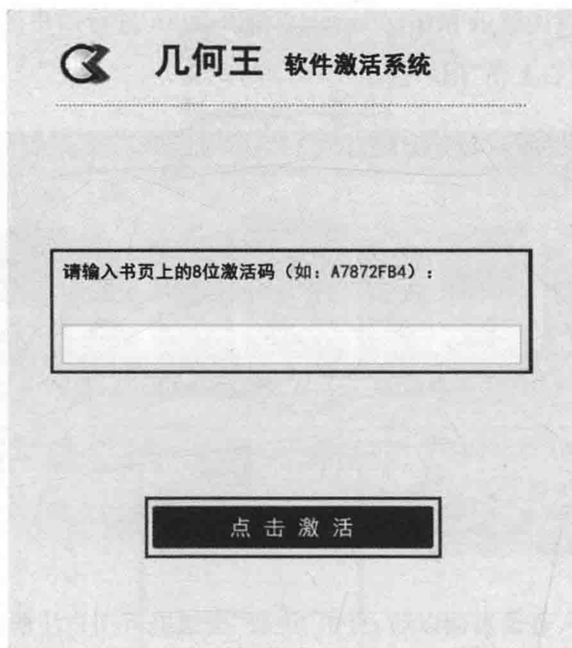
请输入用户名(手机号):

请输入密码:

请确认密码:

点击注册

第三步:请将本书中印刷的八位激活码(区分大小写)正确输入到激活码文本框中,点击“点击激活”按钮后完成激活操作.




第四步:建议用户使用电脑打开并且使用《几何王》软件,网址为:http://www.001jihe.com,点击右上角“用户登录”.




第五步:输入刚才注册的用户名和密码即可正常使用.请妥善保存您的用户名和密码,祝您使用愉快!

## 二、特殊情况

第一步：请直接登录 http://www.001jihe.com 进行用户注册与充值激活. 进入主页后点击右上角“用户登录”.

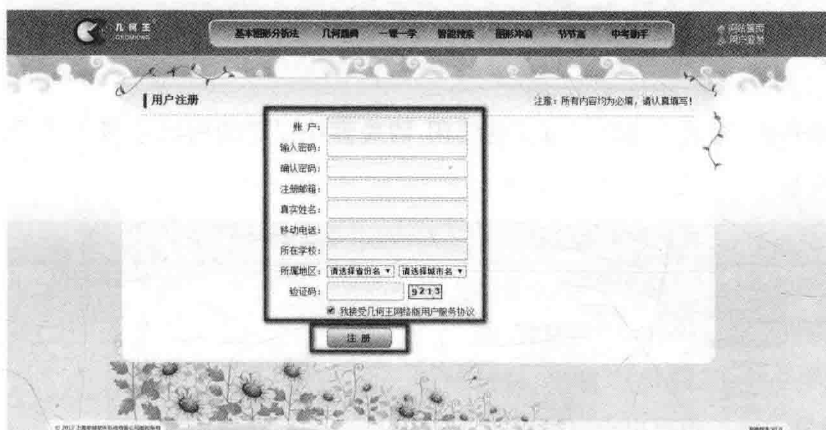



第二步：进入登录页面以后，点击“注册”按钮进行用户注册.如已注册，请直接输入正确的用户名、密码和验证码后点击“登录”按钮，直接进入第四步.




第三步：输入注册信息后，点击“注册”按钮进行注册.




第四步:注册完成后会跳转到"用户中心"页面,点击左边栏的"充值"或右边页面的"充值"按钮进入充值页面.



第五步：输入本书中印刷的八位激活码（区分大小写），点击“确认充值”按钮完成充值.




第六步：充值完成后即可正常使用.请妥善保存您的用户名和密码，祝您使用愉快！

